

This volume was digitized through a
collaborative effort by/ este fondo fue
digitalizado a través de un acuerdo
entre:

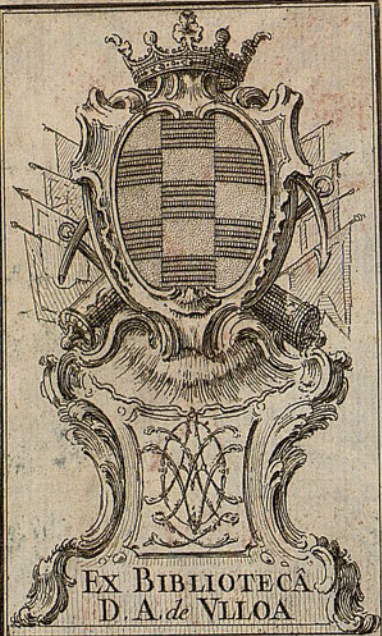
Biblioteca General de la
Universidad de Sevilla

www.us.es

and/y

Joseph P. Healey Library at the
University of Massachusetts Boston
www.umb.edu





EX BIBLIOTECÁ
D. A. de VILLOA



Doc 77
~ 124

NOUVELLE MECANIQUE

OU

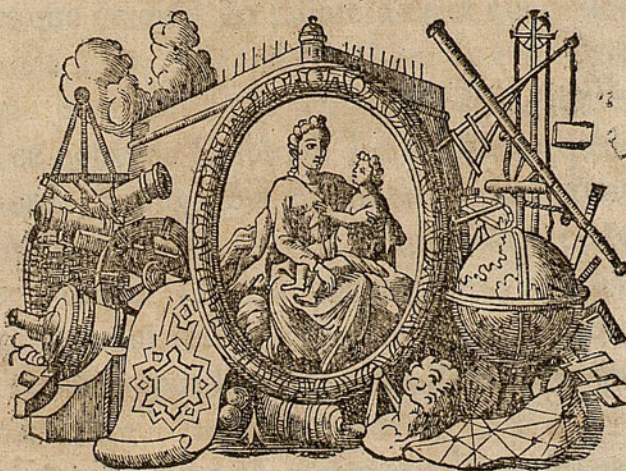
STATIQUE;

DONT LE PROJET FUT DONNÉ¹

EN M. DC. LXXXVII.

*Ouvrage posthume de M. VARIGNON, des Académies
Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Prusse,
Lecteur du Roy en Philosophie au Collège Royal, & Pro-
fesseur des Mathématiques au Collège Mazarin.*

TOME PREMIER.



A PARIS,
Chez CLAUDE JOMBERT, rue S. Jacques, au coin de la rue
des Mathurins, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XXV.

Avec Approbation & Privilège du Roy.

AVERTISSEMENT.

DEs que M. *Varignon* eut découvert que les mouvemens composez expliquoient avec une grande facilité l'emploi des forces dans les Machines ; qu'ils donnoient exactement les rapports de ces forces , selon quelque direction qu'on les y supposât placées , avantage qui manquoit aux méthodes que l'on avoit suivies avant lui : il s'attacha à en faire l'application aux Machines simples ; & en 1685. dans l'*Histoire de la République des Lettres* , il donna un Memoire sur les Poulies à mouffles , dans lequel il se servoit des mouvemens composez pour déterminer tout ce que l'on peut desirer sur cette espèce de Machine.

En 1687. il publia son *Projet d'une Nouvelle Mécanique*. Cet Ouvrage entierement fondé sur la composition des mouvemens , ne contenoit de principes que ce qu'il en falloit à ceux qui possédoient déjà cette Science. Aussi ne le rendoit-il public que pour sçavoir le sentiment des Géomètres sur ce nouveau Systême. Le jugement qu'ils en ont porté , l'a engagé à en faire un *Traité complet de Mécanique* , qui servît à apprendre cette Science à fonds. Il y travailloit encore lorsqu'il est mort. Il ne lui restoit qu'à mettre dans l'ordre qui convenoit à tout l'ouvrage , les Problèmes qui en devoient être la dernière partie.

M. de *Fontenelle* à qui M. *Varignon* a légué ses papiers , a remis ce *Traité* à M. de *Beaufort* de l'Acad-

AVERTISSEMENT.

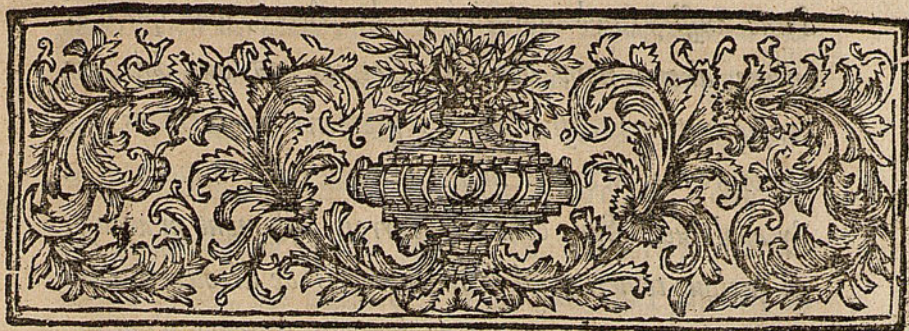
démie Royale des Sciences, qui s'est chargé du soin de l'Édition avec M. l'Abbé Camus. Tout est ici tel que l'Auteur l'a laissé. Il n'y a que les Problèmes, qui étant demeurez sans ordre, ont été arrangez comme on a pu juger qu'ils l'eussent été par M. Varignon lui-même.

On a ajouté deux petits Traitez qui dépendent de la Mécanique, & qui étoient dignes d'être conservez. Le premier regarde la Machine sans frottemens, dont parle M. Perrault dans son *Commentaire sur Vitruve*. L'analyse que M. Varignon en fait, indiquera la maniere dont on doit juger des autres Machines, en y appliquant la méthode des mouvemens composés.

Le second Traité est l'Examen de l'opinion de M. Borelli sur les Poids suspendus à des cordes; on le donne comme M. Varignon l'avoit mis à la suite de son Projet de Mécanique; à cela près que quelques-unes des propositions de cet Examen se trouvant déjà dans le corps de l'Ouvrage, on s'est contenté de les citer.

On a crû devoir conserver l'Épître Dedicatoire à Messieurs de l'Académie Royale des Sciences, & la Préface qui étoient à la tête du Projet de cette Mécanique, l'Auteur n'en ayant point composé d'autres: enfin on y a joint l'Eloge de ce grand Géomètre par le Secrétaire de l'Académie.

Dans la suite on donnera au Public tout ce que l'on trouvera de M. Varignon en état de lui être donné. On commencera par son commerce de Lettres avec les plus fameux Mathématiciens de l'Europe.



A MESSIEURS
DE
L'ACADEMIE
ROYALE
DES SCIENCES.



MESSIEURS,

*Je n'ai pas crû devoir exposer au jugement du Public
ce Projet d'une Nouvelle Mécanique , sans s'appuyer*

à

E P I T R E.

d'une aussi grande autorité que la vôtre , moi qui n'ai encore aucun nom dans les Lettres , & qui dois par conséquent me défier de ces premiers mouvemens que l'amour des Sciences inspire à ceux qui commencent à s'y appliquer. Sans cela on pourroit justement m'accuser de quelque temerité , d'avoir entrepris de découvrir dans cette matiere ce que tant de sçavans Auteurs n'ont pas découvert ; & je craindrois de m'être laissé tromper par ces illusions flatteuses de la nouveauté , qui abusent d'ordinaire les hommes , lorsqu'ils se piquent d'avoir des opinions particulieres. Je puis dire néanmoins , MESSIEURS , que ce n'est pas l'ambition de me signaler par des idées extraordinaires qui m'a poussé à écrire ce petit Traité ; c'est un essai que j'ai voulu faire de mes forces pour être connu de vous , & pour vous donner occasion de m'encourager dans l'étude que j'ai embrassée. Si je n'ai pas tout ce qui est nécessaire pour instruire les autres , j'ai du moins toute la docilité qu'il faut pour être instruit : je ne me flatte point aussi d'avoir établi des principes certains dans ce Projet , ni d'en pouvoir tirer des consequences infaillibles. Vous en jugerez mieux que personne , MESSIEURS , vous qui pénétrez si avant dans les Sciences les plus relevées. On sçait que rien n'échappe à vos soins & à votre exactitude. La Nature si avare aux autres de ses trésors , & si obstinée à se cacher , n'a pû se défendre contre la

E P I T R E.

pénétration de votre esprit, & contre la subtilité de vos recherches : Vous en avez plus découvert en vingt ans, qu'on n'avoit fait en plusieurs siècles. Vos Observations Astronomiques ont dévoilé (pour ainsi dire) des Planettes qui se déroboient à nos yeux ; vos mesures si précises sur la terre, par rapport à celles que vous preniez en même tems dans le Ciel, ont rectifié mille erreurs de nos anciens Géographes. La Physique vous doit ce qu'elle a de plus curieux, soit dans la dissection du Corps humain & des Animaux, soit dans la description & dans l'analyse des Plantes, des Eaux & des Minéraux. Que ne vous doivent point aussi les Mathématiques en général pour tant d'Ouvrages célèbres que vous avez mis au jour ? Enfin il n'y a point de Science que vous n'ayez perfectionnée, & que vous n'enrichissiez de tems en tems par vos travaux. Que n'attend-t-on pas encore de vous, animez comme vous êtes par les bienfaits d'un Grand Roy, qui veut rendre son Regne aussi glorieux par les Sciences & par les Arts, qu'il l'est déjà par ses prodigienses Conquêtes, & ses héroïques actions ? A quoi ne devez-vous pas aspirer vous-mêmes aujourd'hui sous la protection d'un Ministre si sage & si vigilant, qui excite tout le monde par ses ordres & par son exemple à illustrer & à célébrer un Regne si plein de merveilles ? Souffrez donc, MESSIEURS, s'il vous plaît, vous qui êtes comme

ÉPI TRE.

à la source de toutes les Sciences humaines , & à qui rien ne manque pour continuer vos recherches , & pour augmenter vos connoissances , que j'ose vous offrir & mettre au jour ce que j'ai puisé dans cette source ; & qu'en essayant de vous suivre & de vous imiter , je puisse quelquefois profiter de vos lumieres , & vous assurer que je suis avec une parfaite vénération,

MESSEI E U R S ,

Votre très-humble & très-
obéissant serviteur,

VARIGNON.

PREFACE.

P R E F A C E.



L'ouverture du second Tome des Lettres de M. Descartes , je tombai sur un endroit de la 24. où il dit que *c'est une chose ridicule , que de vouloir employer la raison du Levier dans la Poulie*. Cette réflexion m'en fit faire une autre ; sçavoir , s'il est plus raisonnable de s'imaginer un Levier dans un poids qui est sur un plan incliné , que dans une Poulie. Après y avoir pensé , il me sembla que ces deux Machines étant pour le moins aussi simples que le Levier , elles n'en devoient avoir aucune dépendance , & que ceux qui les y rapportoient , n'y étoient forcez , que parce que leurs principes n'avoient pas assez d'étendue pour en pouvoir démontrer les proprietez indépendamment les unes des autres.

En effet en examinant ces principes un peu de près , il me parut qu'ils ne pouvoient servir tout au plus qu'à démontrer que *l'équilibre se trouve toujours dans un Levier auquel sont appliquez deux poids qui sont entr'eux en raison reciproque des distances de leurs lignes de direction à son point d'appui* ; encore n'étoit-ce qu'en ce cas : 1°. *Que ce Levier fût droit.* 2°. *Que son point d'appui fût entre les lignes de direction des poids qui y sont appliquez.* 3°. *Que ces mêmes lignes*

P R E F A C E.

fussent paralleles entr'elles , & perpendiculaires à ce Levier. Aussi Guid-Ubalde , & les autres qui s'entendent à la démonstration d'Archimède , ont-ils été obligez de faire revenir de gré ou de force toutes sortes de Machines à cette espece de Levier , & de réduire de même tous les autres cas à celui-ci.

C'est peut-être ce qui a porté M. Descartes & M. Wallis à prendre une autre route. Quoi qu'il en soit , ce n'a pas été sans succès ; puisque celle qu'ils ont suivie , conduit également à la connoissance des usages de chacune de ces Machines , sans être obligé de les faire dépendre l'une de l'autre ; outre qu'elle a mené M. Wallis beaucoup plus loin qu'aucun Auteur , que je sçache , n'eût encore été de ce côté-là.

La comparaison que je fis de ces deux sortes de Principes , me fit sentir que ceux d'Archimède n'étoient ni si étendus , ni si convainquans que ceux de M. Descartes & de M. Wallis ; mais je ne sentis point que les uns ni les autres m'éclairassent beaucoup. J'en cherchai la raison , & ce défaut me parut venir de ce que ces Auteurs se font tous plus attachez à prouver la nécessité de l'équilibre , qu'à montrer la maniere dont il se fait.

Ce fut ce qui me fit prendre le parti d'épier moi-même la nature , & d'essayer si en la suivant pas à pas , je ne pourrois point appercevoir comment elle y prend , pour faire que deux puissances , ~~soit~~ égales , ou inégales , demeurent en

P R E F A C E.

équilibre. Enfin je m'appliquai à chercher l'équilibre lui-même dans sa source, ou pour mieux dire, dans sa generation.

Le premier objet qui me vint à l'esprit, ce fut un poids qu'une puissance soutient sur un plan incliné. D'abord je me le représentai de telle figure que le concours de sa ligne de direction avec celle de cette puissance, se fit dans quelqu'un de ses points. De-là je vis aussi que leur concours d'action se faisant aussi par ce moyen dans ce seul point, il devenoit alors son centre de direction : de sorte que si ce plan eût manqué tout d'un coup, ce corps auroit nécessairement suivi l'impression de ce point. Je cherchai ensuite quelle devoit être cette impression, & j'apperçus que celles que faisoient sur ce point, & la pesanteur de ce poids, & la puissance qui le retenoit, étant les mêmes que s'il eût été poussé en même tems par deux forces qui leur eussent été égales, & qui eussent agi suivant leurs lignes de direction. J'apperçus, dis-je, qu'il lui en résultoit une impression composée suivant une ligne qui étoit la diagonale d'un parallelogramme fait sous des parties de ces lignes de direction, qui étoient entr'elles comme ce poids & cette puissance. D'où je vis que l'impression de ce corps se faisoit alors suivant cette diagonale, qui devenoit en ce cas sa ligne de direction ; mais que ce plan lui étant perpendiculairement opposé, il la soutenoit toute entiere ; ce qui faisoit que ce poids ainsi poussé

c ij

P R E F A C E.

par le concours d'action de sa pesanteur & de la puissance qui lui étoit appliquée, demeurait sur ce plan incliné de même que s'il eût été horison-tal, & que cette impression composée n'eût été qu'un effet de sa pesanteur.

De cette pensée j'en vis n'aitre plusieurs autres, & je m'aperçûs, 1°. Que toute l'impression que ce plan recevoit alors de ce poids ainsi soutenu par cette puissance, se faisoit suivant cette diagonale. 2°. Que sa charge, c'est-à-dire, la force de cette même impression, étoit à ce poids & à cette puissance, comme cette même diagonale à chacun des côtes qui les représentent dans son parallelogramme. 3°. Que ce poids & cette puissance étoient toujours entr'eux comme ces mêmes côtes, c'est-à-dire, en raison réciproque des sinus des angles que font leurs lignes de direction avec cette diagonale, ou (ce qui revient au même) en raison réciproque des distances de quelque point que ce soit de cette diagonale à leurs lignes de direction. Je vis enfin presque tout à la fois quantité de choses toutes nouvelles, qu'on verra dans les Corollaires de la Proposition des Surfaces.

Après avoir ainsi trouvé la maniere dont l'équilibre se fait sur des plans inclinez, je cherchai par le même chemin comment des poids soutenus avec des cordes seulement, ou appliquez à des Poules, ou bien à des Leviers, sont équilibre entr'eux, ou avec les puissances qui les sou-

P R E F A C E.

tiennent ; & j'appercûs de même que tout cela se faisoit encore par la voye des mouvemens composez, & avec tant d'uniformité, que je ne pus m'empêcher de croire que cette voye ne fût véritablement celle que suit la nature dans le concours d'action de deux poids ou de deux puissances, en faisant que leurs impressions particulieres, quelque proportion qu'elles ayent, se confondent en une seule, qui se décharge toute entiere sur le point où se fait cet équilibre: de sorte que la raison Physique des effets qu'on admire le plus dans les Machines, me parut être justement celle des mouvemens composez.

Je me démontrai d'abord par cette méthode, & sans le secours d'aucune Machine, les proprieté des poids suspendus avec des cordes, en quelque nombre qu'elles soient, & pour tous les angles possibles qu'elles peuvent faire entr'elles. De là je passai à une démonstration des Poulies, qui comprend toutes les directions possibles des puissances ou des poids qui y sont appliquez, soit que le centre de ces Poulies demeure fixe, soit qu'on le suppose mobile. Ensuite au lieu de la démonstration qu'on ne fait ordinairement que pour les plans inclinez, j'en trouvai une qui s'étend généralement à toutes sortes de surfaces, & à toutes les directions possibles des puissances ou des poids qui y sont appliquez. Enfin d'une seule démonstration je découvris les proprieté de toutes les especes de Leviers, de quelque figure, & dans quel-

P R E F A C E.

que situation qu'ils soient , & pour toutes les directions possibles des puissances ou des poids qui y sont appliquez.

Des vûes si étenduës me surprirent ; & l'évidence avec laquelle le détail de tout cela me paroïsoit , indépendamment même du général , me confirma encore dans l'opinion où j'étois , qu'il faut entrer dans la génération de l'équilibre , pour y voir en soi , & pour y reconnoître les proprieté que tous les autres Principes ne prouvent tout au plus que par nécessité de conséquence.

Il y a encore un avantage dans la route que je tiens , c'est qu'elle facilite extrêmement le calcul des forces , tant des poids que des puissances , en ce que leurs rapports y sont toujours déterminez immédiatement par les sinus des angles que font leurs lignes de direction avec celle de l'impression qui résulte de leur concours d'action , & que cette méthode détermine pour le point où elles concourent. On y voit que lorsque deux puissances ou deux poids , ou bien une puissance & un poids font équilibre , soit avec des cordes seulement , soit à l'aide de quelque Poulie , de quelque Surface , ou de quelque Levier que ce soit , ils sont toujours entr'eux en raison réciproque des sinus de ces mêmes angles.

J'avois dessein d'expliquer avec cette méthode les effets les plus surprenans & les plus difficiles des Machines composées que l'on rencontre dans les arts & dans la nature ; mais cela demandoit plus

P R E F A C E.

de loisir, & même un plus grand nombre d'expériences que l'état de ma fortune ne me peut permettre : c'est pour cela que je me suis déterminé à ne donner présentement que les Propositions fondamentales de la Mécanique. Peut-être que de plus habiles gens que moi, & qui seront plus en état de faire cette entreprise, voudront bien se donner la peine d'en faire l'application à la Physique.

Mais en attendant je ne laisserai pas d'amasser tout ce que je pourrai d'expériences pour ce dessein : c'est pourquoi je prie ceux qui n'auront pas en vûe d'y travailler, de vouloir bien me communiquer celles qu'ils croiront s'y pouvoir rapporter ; & sur-tout de me faire part de tout ce qui leur viendra de difficulté ou de lumières sur les principes qu'on propose ici, leur promettant d'en user avec toute la docilité d'un homme qui ne cherche que la vérité.





ELOGE

DE M. V A R I G N O N.

Pierre Varignon nâquit à Caën en 1654. d'un Architecte Entrepreneur, dont la fortune étoit fort médiocre. Il avoit deux freres, qui suivirent la profession du pere, & il étudia pour être Ecclesiastique.

Au milieu de cette éducation commune, qu'on donne aux jeunes gens dans les Colleges, tout ce qui peut les occuper un jour plus particulièrement vient par differens hazards se presenter à leurs yeux; & s'ils ont quelque inclination naturelle bien déterminée, elle ne manque pas de saisir son objet, dès qu'elle le rencontre. Comme les Architectes, & quelquefois les simples Maçons, sçavent faire des Cadrans, M. Varignon en vit tracer de bonne heure, & ne le vit pas indifferemment. Il en apprit la pratique la plus grossiere, qui étoit tout ce qu'il pouvoit apprendre de ses Maîtres; mais il soupçonnoit que tout cela dépendoit de quelque Théorie générale, soupçon qui ne servoit qu'à l'inquiéter, & à le tourmenter sans fruit. Un jour, pendant qu'il étoit en Philosophie aux Jesuites de Caën, feuilletant par amusement differens Livres dans la boutique d'un Libraire, il tomba sur un Euclide, & en lut les premieres pages, qui le charmerent non seulement par l'ordre & l'enchaînement des idées, mais encore par la facilité qu'il se sentit à y entrer. Comment l'esprit humain n'aimeroit-il pas ce qui lui rend témoignage de ses talens? Il emporta l'Euclide chez lui, & en fut toujours plus charmé par les mêmes raisons. L'incertitude éternelle, l'embarras Sophistique, l'obscurité inutile, & quelquefois affectée de la Philosophie des Ecoles, aiderent encore à lui faire goûter

goûter la clarté, la liaison, la sûreté des veritez géométriques. La Géométrie le conduisit aux ouvrages de Descartes, & il y fut frappé de cette nouvelle lumiere, qui de-là s'est répandue dans tout le Monde pensant. Il prenoit sur les necessitez absolues de la vie de quoi acheter des Livres de cette espece, ou plutôt il les mettoit au nombre des necessitez absolues; il falloit même, & cela pouvoit encore irriter la passion, qu'il ne les étudiât qu'en secret; car ses parens qui s'appercevoient bien que ce n'étoient pas-là les Livres ordinaires dont les autres faisoient usage, desapprouvoient beaucoup, & traversoient de tout leur pouvoir l'application qu'il y donnoit. Il passa en Théologie, & quoique l'importance des matieres, & la necessité dont elles sont pour un Ecclesiastique, le fixassent davantage, sa passion dominante ne leur fut pas entierement sacrifiée.

Il alloit souvent disputer à des Theses dans les Classes de Philosophie, & il brilloit fort par sa qualité de bon argumenteur, à laquelle concouroient & le caractère de son esprit, & sa constitution corporelle, beaucoup de force & de netteté de raisonnement d'un côté, & de l'autre une excellente poitrine, & une voix éclatante. Ce fut alors que M. l'Abbé de S. Pierre qui étudioit en Philosophie dans le même College, le connut. Un goût commun pour les choses de raisonnement, soit Physiques, soit Métaphysiques, & des disputes continuelles, furent le lien de leur amitié. Ils avoient besoin l'un de l'autre pour approfondir, & pour s'assurer que tout étoit vû dans un sujet. Leurs caracteres differens faisoient un assortiment complet & heureux, l'un par une certaine vigueur d'idées, par une vivacité féconde, par une fougue de raison; l'autre par une analyse subtile, par une précision scrupuleuse, par une sage & ingenieuse lenteur à discuter tout.

M. l'Abbé de S. Pierre pour jouir plus à son aise de M. Varignon, le logea avec lui; & enfin toujours plus touché de son merite, il résolut de lui faire une fortune,

E L O G E

qui le mît en état de suivre pleinement ses talens & son génie. Cependant cet Abbé, cadet de Normandie, n'avoit que 1800 liv. de rente; il en détacha 300 qu'il donna par Contrat à M. Varignon. Ce peu qui étoit beaucoup par rapport au bien du Donateur, étoit beaucoup aussi par rapport aux besoins & aux desirs du Donataire. L'un se trouva riche, & l'autre encore plus d'avoir enrichi son ami.

L'Abbé persuadé qu'il n'y avoit point de meilleur séjour que Paris pour des Philosophes raisonnables, vint en 1686. s'y établir avec M. Varignon dans une petite maison du Fauxbourg Saint Jacques. Là ils pensoient chacun de son côté, car ils n'étoient plus tant en communauté de pensées; l'Abbé revenu des subtilitez inutiles & fatigantes, s'étoit tourné principalement du côté des réflexions sur l'Homme, sur les mœurs & sur les principes du gouvernement. M. Varignon s'étoit totalement enfoncé dans les Mathématiques. J'étois leur compatriote, & allois les voir assez souvent, & quelquefois passer deux ou trois jours avec eux; il y avoit encore de la place pour un survenant, & même pour un second sorti de la même Province, aujourd'hui l'un des principaux Membres de l'Académie des Belles Lettres, & fameux par les Histoires qui ont paru de lui. Nous nous rassemblions avec un extrême plaisir, jeunes, pleins de la première ardeur de sçavoir, fort unis, & ce que nous ne comptions peut-être pas alors pour un assez grand bien, peu connus. Nous parlions à nous quatre une bonne partie des différentes Langues de l'Empire des Lettres, & tous les Sujets de cette petite société se sont dispersés de-là dans toutes les Académies.

M. Varignon, dont la constitution étoit robuste, au moins dans sa jeunesse, passoit les journées entières au travail: nul divertissement, nulle récréation, tout au plus quelque promenade à laquelle sa raison le forçoit dans les beaux Jours. Je lui ai ouï dire que travaillant après souper selon sa coutume, il étoit souvent surpris par des

Cloches qui lui annonçoient deux heures après minuit , & qu'il étoit ravi de se pouvoir dire à lui-même que ce n'étoit pas la peine de se coucher pour se relever à quatre heures. Il ne sortoit de-là ni avec la tristesse, que les matieres pouvoient naturellement inspirer , ni même avec la lassitude que devoit causer la longueur seule de l'application, il en sortoit gai & vif , encore plein des plaisirs qu'il avoit pris , impatient de recommencer. Il rioit volontiers en parlant de Géométrie ; & à le voir on eût cru qu'il la falloit étudier pour se bien divertir. Nulle condition n'étoit tant à envier que la sienne ; sa vie étoit une possession perpetuelle & parfaitement paisible de ce qu'il aimoit uniquement. Cependant si on eût eu à chercher un homme heureux, on l'eût été chercher bien loin de lui , & bien plus haut , mais on ne l'y eût pas trouvé.

Dans sa solitude du Fauxbourg Saint Jacques , il ne laissoit pas de lier commerce avec plusieurs Sçavans, & des plus illustres, tels que Messieurs du Hamel, du Verney, de la Hire. M. du Verney lui demandoit assez souvent des lumieres sur ce qu'il y a en Anatomie qui appartient à la Science des Mécaniques ; ils examinoient ensemble des positions de Muscles, leurs points d'appui, leurs directions , & M. du Verney apprenoit beaucoup d'Anatomie à M. Varignon, qui l'en payoit par des raisonnemens mathématiques appliquez à l'Anatomie.

Enfin en 1687. il se fit connoître du Public par son *Projet d'une Nouvelle Mécanique* dédié à l'Académie des Sciences. Elle étoit nouvelle en effet. Découvrir des veritez , & en découvrir les sources , ce sont deux choses qui peuvent d'abord paroître inséparables , & qui cependant sont souvent séparées , tant la Nature a été avare de connoissances à notre égard. En Mécanique dont il s'agit ici , on démontroit bien la nécessité de l'Equilibre dans les cas où il arrive ; mais on ne sçavoit pas précisément ce qui le causoit. C'est ce que M. Varignon apperçut par la Théorie des Mouvements composés,

ELOGE

& c'est ce qui fait tout le sujet de son Livre. Les principes essentiels une fois trouvez, les veritez coulent avec une facilité délicate pour l'esprit, leur enchaînement est plus simple, & en même tems plus étroit, le spectacle de leur generation, qui n'a plus rien de forcé, en est plus agréable, & cette même generation plus légitime en quelque sorte, est aussi plus féconde. La Nouvelle Mécanique fut reçue de tous les Géomètres avec applaudissement; & elle valut à son Auteur deux places considerables, l'une de Géomètre dans cette Académie en 1688. l'autre de Professeur de Mathématiques au College Mazarin. On vouloit donner du relief à cette Chaire, qui n'avoit point encore été remplie, & il fut choisi.

Il mit au jour en 1690. ses *Nouvelles Conjectures sur la Pesanteur*. Il conçoit une Pierre posée dans l'Air, & il demande pourquoi elle tombe vers le centre de la Terre. L'Air est un Liquide, dont par consequent les différentes parties se meuvent en tous les sens imaginables, & une direction quelconque étant déterminée, il n'est pas possible qu'il n'y en ait un grand nombre qui s'accordent à la suivre. On peut imaginer toutes celles qui s'accordent dans une même direction, comme ne faisant qu'une même Colonne. La Pierre est donc frappée par des Colonnes qui la poussent d'Orient en Occident, d'Occident en Orient, de bas en haut, de haut en bas. Les Colonnes qui la poussent lateralement d'Orient en Occident, ou au contraire, sont égales en longueur, & par consequent en force, & il n'en résulte à la Pierre aucune impression. Mais celles qui la poussent de haut en bas sont beaucoup plus longues que celles qui la poussent de bas en haut, & cela à quelque distance de la Terre où la Pierre ait jamais pû être portée; elle sera donc poussée avec plus de force de haut en bas, que de bas en haut, & elle tombera, & tombera vers le centre de la Terre; or, ce qui est le même, perpendiculairement

à sa surface, parce que les Colonnes laterales égales en force, l'empêchent de s'écarter, ni à droite, ni à gauche. Si la Pierre étoit à une égale distance & de la Terre, & de la dernière surface de l'Air, elle demeureroit en repos, plus loin elle monteroit. Ce qu'on a dit de l'Air, on le dira de même de la matiere subtile, & de tout autre Liquide où des Corps seront posez. Telle est en general l'idée de M. Varignon sur la cause de la Pesanteur. Plusieurs grands Hommes ont prouvé par l'inutilité de leurs efforts l'extrême difficulté de cette matiere; & j'avoué qu'il pourroit bien aussi l'avoir prouvée. Du moins ce Systême a-t'il eu peu de Sectateurs; & quoique simple, bien lié, bien suivi, il est vrai qu'un Physicien, même avant la discussion, ne se sent point porté à le croire. L'Auteur l'auroit plus aisément défendu que persuadé. Aussi ne l'a-t'il point donné avec cette confiance & cet air triomphant, qui ont accompagné tant d'autres Systêmes; le titre modeste de *Conjectures* répondoit sincerement à sa pensée. Il ne croyoit point qu'en matiere de Physique, & principalement sur les premiers principes de la Physique, on pût passer la conjecture, & il sembloit être ravi que sa chere Géométrie eût seule la certitude en partage.

Dans ses recherches mathématiques, son génie le portoit toujours à les rendre les plus generales qu'il fût possible. Un Païsage dont on aura vû toutes les parties l'une après l'autre, n'a pourtant point été vû, il faut qu'il le soit d'un lieu assez élevé, où tous les objets auparavant dispersez, se rassemblent sous un seul coup d'œil. Il en va de même des veritez géométriques; on en peut voir un grand nombre dispersez çà & là, sans ordre entr'elles, sans liaison; mais pour les voir toutes ensemble, & d'un coup d'œil, on est obligé de remonter bien haut, & cela demande de l'effort & de l'adresse. Les formules generales Algébriques sont les lieux élevez où l'on se place pour découvrir tout à la fois un grand

Pays. Il n'y a peut-être pas eu de Géomètre, ni qui ait mieux connu, ni qui ait mieux fait sentir le prix de ces formules que M. Varignon.

Il ne pouvoit donc manquer de saisir avidement la Géométrie des Infiniment Petits, dès qu'elle parut; elle s'éleve sans cesse au plus haut point de vûë possible, à l'Infini, & de-là elle embrasse une étenduë infinie. Avec quel transport vit-il naître une nouvelle Géométrie, & de nouveaux plaisirs? Quand cette belle & sublime Méthode fut attaquée dans l'Académie même*, car il falloit qu'elle subît le sort de toutes les nouveautez, il en fut un des plus ardens Défenseurs, & il força en sa faveur son caractere naturel ennemi de toute contestation. Il se plaignit quelquefois à moi, que cette dispute l'avoit interrompu dans des recherches sur le Calcul Integral, dont il auroit de la peine à reprendre le fil. Il sacrifia les Infiniment Petits à eux-mêmes, le plaisir & la gloire d'y faire des progrès au devoir plus pressant de les défendre.

* V. l'Hist.
de 1701. p.
89. & suiv.
2^e Edit.

Tous les Volumes que l'Académie a imprimez, rendent compte de ses travaux. Ce ne sont presque jamais des morceaux détachez les uns des autres; mais de grandes Théories completes sur les Loix du Mouvement, sur les forces Centrales, sur la Resistance des Milieux au Mouvement. Là par le moyen de ses formules generales, rien ne lui échappe de ce qui est dans l'enceinte de la matiere qu'il traite. Outre les veritez nouvelles, on en voit d'autres déjà connues d'ailleurs, mais détachées, qui viennent de toutes parts se rendre dans sa Théorie. Toutes ensemble font corps, & les vuides qu'elles laissoient auparavant entr'elles, se trouvent remplis.

La certitude de la Géométrie n'est nullement incompatible avec l'obscurité & la confusion; & elles sont quelquefois telles, qu'il est étonnant qu'un Géomètre ait pû se conduire sûrement dans le labyrinthe ténébreux où il marchoit. Les Ouvrages de M. Varignon ne causent ja-

mais cette desagréable surprise ; il s'étudie à mettre tout dans le plus grand jour ; il ne s'épargne point , comme font quelquefois de grands hommes , le travail de l'arrangement , beaucoup moins flateur , & souvent plus pénible que celui de la production même , il ne recherche point par des sous-entendus hardis la gloire de paroître profond.

Il possédoit fort l'Histoire de la Géométrie. Il l'avoit apprise non pas tant précisément pour l'apprendre , que parce qu'il avoit voulu rassembler des lumières de tous côtez. Cette connoissance historique est sans doute un ornement pour un Géomètre ; mais de plus ce n'est pas un ornement inutile. En general plus l'esprit a été tourné & retourné en differens sens sur une même matiere , plus il en devient fécond.

Quoique la santé de M. Varignon parût devoir être à toute épreuve , l'assiduité & la contention du travail lui causerent en 1705. une grande maladie. On n'est guères si habile impunément. Il fut six mois en danger , & trois ans dans une langueur , qui étoit un épuisement d'esprits visibles. Il ma conté que quelquefois dans des accès de fièvre , il se croyoit au milieu d'une forêt , où il voyoit toutes les feuilles des arbres couvertes de Calculs algebriques. Condamné par ses Medecins , par ses amis , & par lui-même à se priver de tout travail , il ne laissoit pas , dès qu'il étoit seul dans sa chambre , de prendre un Livre de Mathématique , qu'il cachoit bien vite , s'il entendoit venir quelqu'un. Il reprenoit la contenance d'un malade , & n'avoit pas besoin de jouer beaucoup.

Il est à remarquer , par rapport à son caractère , que ce fut en ces tems-là qu'il parut de lui un Ecrit , où il reprenoit M. Wallis sur de certains Espaces plus qu'Infinis , que ce grand Géomètre attribuoit aux Hyperboles. Il soutenoit au contraire qu'ils n'étoient que finis. * La critique avoit tous les assaisonnemens possibles d'honnêteté ; mais enfin c'étoit une critique : & l'avoit

* V. l'Hist.
de 1706. p. 1.
47.

faite que pour lui seul. Il la confia à M. Carré, étant dans un état qui le rendoit plus indifférent pour ces sortes de choses ; & celui-ci touché du seul intérêt des Sciences, la fit imprimer dans nos Memoires, à l'insçu de l'Auteur, qui se trouva Agresseur contre son inclination.

Il revint de sa maladie & de sa langueur, & ne profita nullement du passé. L'Edition de son *Projet d'une Nouvelle Mécanique* ayant été entièrement débitée, il songea à en faire une seconde, ou plutôt un Ouvrage nouveau, quoique sur le même plan, mais beaucoup plus ample, & auquel le titre de *Projet* ne convenoit plus. On y devoit bien sentir la grande acquisition de richesses qu'il avoit faite dans l'intervalle. Mais il se plaignoit souvent que le tems lui manquoit, quoiqu'il fût bien éloigné d'en perdre volontairement. Une infinité de visites soit de François, soit d'Etrangers, dont les uns vouloient le voir pour l'avoir vû, & les autres pour le consulter & s'instruire des Ouvrages de Mathématique que l'autorité ou l'amitié de quelques personnes l'engageoient à examiner, & dont il se croyoit obligé de rendre le compte le plus exact ; un grand commerce de lettres avec les principaux Géomètres de l'Europe, & des lettres sçavantes & travaillées ; car il ne falloit pas plus se negliger avec ces amis-là, qu'avec le Public même : tout cela nuisoit beaucoup au Livre qu'il avoit entrepris. C'est ainsi qu'on devient celebre, parce qu'on a été maître de disposer d'un grand loisir, & qu'on perd ce loisir si précieus, parce qu'on est devenu celebre. De plus ses meilleurs Ecoliers, soit du College Mazarin, soit du College Royal, car il y occupoit aussi une Chaire de Mathématique, étoient en possession de lui demander des leçons particulieres. La joye de voir qu'ils en demandoient, son zele pour les Mathématiques, sa bonté naturelle, son inclination à étendre un devoir plutôt qu'à le resserrer, leur avoient donné ce droit, & ôté la crainte d'en user trop librement. Il soupiroit après deux ou trois mois de vacances qu'il avoit pendant l'année ; il fuyoit

fuyoit à quelque campagne, où les journées entières étoient à lui, & s'écouloient bien vîte.

Malgré son extrême amour pour la paix, il a fini sa vie par être embarqué dans une contestation. Un Religieux Italien, habile en Mathématique, l'attaqua sur la Tangente & l'Angle d'attouchement des Courbes, tels qu'on les conçoit dans la Géométrie des Infiniment Petits. * Il se crut obligé de répondre, &, à dire le vrai, les indifferens ne l'eussent pas trop crû. Je ne crois pas sortir du personnage de simple Historien, en assurant que sa gloire ne couroit aucun péril; mais il étoit sensible de ce côté-là, ou plutôt toute sa sensibilité y étoit rassemblée. Il répondit par le dernier Memoire qu'il ait donné à l'Academie, & qui a été le seul où il fût question d'un differend. Son inclination pacifique y dominoit pourtant encore; il n'y nommoit point son Adversaire, qui l'avoit nommé à tout moment, que tout le monde connoissoit, qui ne se cachoit point; & quoiqu'on lui représentât la parfaite inutilité, & même la superstition de cette reticence, il s'obstina toujours à ne le nommer que *l'Aggresseur*. Il est vrai qu'il n'en usoit pas si honnêtement à l'égard des Paralogismes, & qu'il leur donnoit leur veritable nom.

Dans les deux dernieres années de sa vie, il fut fort incommodé d'un rhumatisme placé dans les muscles de la poitrine; il ne pouvoit marcher quelque tems sans être obligé de se reposer pour reprendre haleine. Cette incommodité augmenta toujours, & tous les remedes y furent inutiles; ce qui ne le surprenoit pas beaucoup. Il n'en relâcha rien de ses occupations ordinaires; & enfin après avoir fait sa classe au College Mazarin le 22 Decembre 1722. sans être plus mal que de coutume, il mourut subitement la nuit suivante.

Son caractère étoit aussi simple que sa supériorité d'esprit pouvoit le demander. J'ai déjà donné cette même loüange à tant de personnes de cette Académie, qu'on peut croire que le merite en appartient plutôt à nos

* V. Hist.
de l'Acad.
ann. 1722.
pag. 74. &
suiv.

E L O G E

Sciences qu'à nos Sçavans. Il ne connoissoit point la jalousie: il est vrai qu'il étoit à la tête des Géomètres de France, & qu'on ne pouvoit compter les grands Géomètres de l'Europe, sans le mettre du nombre: mais combien d'hommes en tout genre élevez à ce même rang, ont fait l'honneur à leurs inferieurs d'en être jaloux, & de les décrier? La passion de conserver une premiere place fait prendre des précautions qui dégradent. Il faut convenir cependant que quand on lui presentoit quelque'idée qui lui étoit nouvelle, il couroit quelquefois un peu trop vîte à l'objection, & à la difficulté; le feu de son esprit, des vûes dont il étoit plein sur chaque matiere, venoient traverser trop impetueusement celles qu'on lui offroit; mais on parvenoit assez facilement à obtenir de lui une attention plus tranquille & plus favorable. Il mettoit dans la dispute une chaleur que l'on n'eût jamais cru qu'il eût dû terminer par rire. Ses manieres d'agir nettes, franches, loyales en toute occasion, exemptes de tout soupçon d'interêt indirect & caché, auroient seules suffi pour justifier la Province dont il étoit, des reproches qu'elle a d'ordinaire à essuyer: il n'en conservoit qu'une extrême crainte de se commettre, qu'une grande circonspection à traiter avec les hommes, dont effectivement le commerce est toujours redoutable. Je n'ai jamais vû personne qui eût plus de conscience, je veux dire, qui fut plus appliqué à satisfaire exactement au sentiment interieur de ses devoirs, & qui se contentât moins d'avoir satisfait aux apparences. Il possédoit la vertu de reconnoissance au plus haut degré; il faisoit le récit d'un bienfait reçu avec plus de plaisir que le Bienfaicteur le plus vain n'en eût eu à le faire; & il ne se croyoit jamais acquitté par toutes ces compensations, dont on s'établit soi-même pour juge. Il étoit Prêtre, & n'avoit pas besoin de beaucoup d'efforts pour vivre conformément à cet état. Aussi sa mort subite n'a-t'elle point allarmé ses amis.

Il m'a fait l'honneur de me léguer tous ses papiers.

par son Testament. J'en rendrai au Public le meilleur compte qu'il me sera possible. La Nouvelle Mécanique est en assez bon état, & paroîtra au jour : j'espere que les Lettres la suivront. Du reste je promets de ne rien détourner à mon usage particulier des Tresors que j'ai entre les mains ; & je compte que j'en ferai crû. Il faudroit un plus habile homme pour faire sur ce sujet quelque mauvaise action avec quelque esperance de succès.



TABLE

DES SECTIONS CONTENUES
dans ce premier Volume.

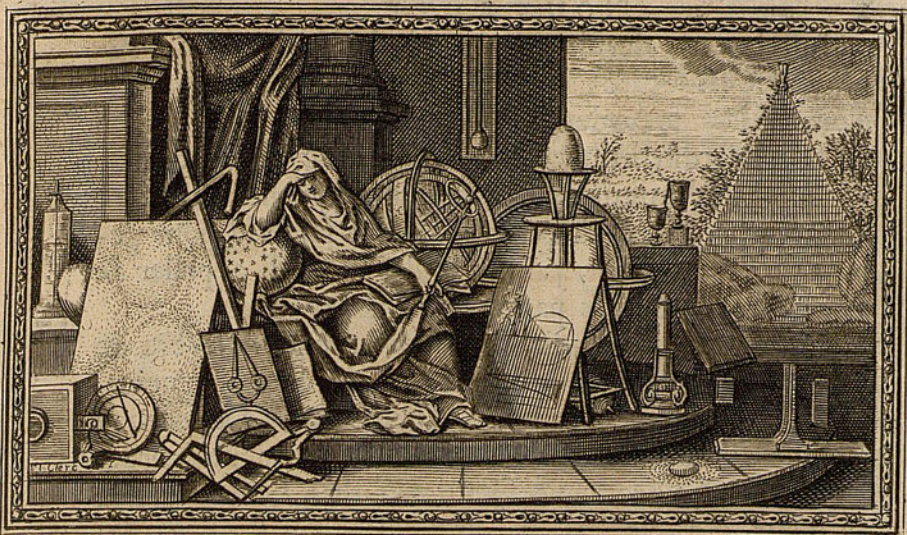
PREMIERE SECTION. *Lemmes pour l'intelligence
des Sections suivantes ,* page 3

SECT. II. *Des Poids soutenus avec des cordes seule-
ment , en quelque nombre qu'elles soient , & pour
tous les angles possibles qu'elles peuvent faire entre-
elles ,* 93

SECT. III. *Des Poulies & des Moufles ; soit que le
centre de ces Poulies demeure fixe , ou qu'on le sup-
pose mobile ; & pour toutes les directions possibles
des puissances ou des poids qui y seront appliquez ,* 210

SECT. IV. *Du Tour & des autres Machines qui y
ont rapport ,* 271

SECT. V. *De toutes sortes de Leviers , de quelque
figure , de quelque espece , & dans quelque situation
qu'ils soient , & pour toutes les directions possibles
des puissances , ou des poids qui y sont appliquez ,* 300



NOUVELLE MECANIQUE.



A Mécanique en general est la Science du Mouvement, de sa cause, de ses effets; en un mot de tout ce qui y a rapport. Par conséquent elle est aussi la Science des propriétés & des usages des Machines ou Instrumens propres à faciliter le Mouvement. Entre ces Machines on en compte d'ordinaire six élémentaires après Pappus (*Liv. 8.*) lequel pourtant n'en compte que cinq, quoiqu'il en employe six; sçavoir, le *Levier*, le *Tour*, la *Poulie*, le *Plan incliné*, la *Vis*, & le *Coin*; auxquelles on en peut encore ajouter une, que j'appelle *Funiculaire*, en ce qu'elle n'est faite que de cordes propres à soutenir des poids sans le secours d'aucune autre Machine, & en ce qu'elle est aussi indépendante de celles-là, qu'elles le sont entr'elles. On définira toutes ces Machines, à mesure qu'on en démontrera les propriétés.

C'est de cette dernière partie de Mécanique qu'il s'agit ici, c'est-à-dire, qu'il ne s'agit que des Machines élémentaires précédentes, & de quelques autres qu'on regarde d'ordinaire comme composées de celles-là. Cette partie de Mécanique est proprement appelée *Statique*; mais la plupart des Auteurs lui ayant laissé le nom général de *Mécanique*, j'ai crû la devoir aussi appeler de ce nom, pour ne pas parler autrement qu'eux.

Ce Traité sera de dix Sections: La première sera de Définitions, d'Axiomes, de Demandes, & de Lemmes, pour le mettre à la portée des Commencans. La seconde sera de Poids suspendus ou soutenus avec des cordes seulement. La troisième sera des Poulies. La quatrième, du Tour. La cinquième, du Levier. La sixième, du Plan incliné. La septième, de la Vis. La huitième, du Coin. La neuvième contiendra un Corrolaire général des principes établis dans les Sections précédentes; & la dixième enfin traitera de l'équilibre des Liqueurs.





PREMIERE SECTION.

Pour l'intelligence des Sections suivantes.

DEFINITIONS.

I. **O**N appelle *Machine*, tout Instrument dont on peut se servir à mouvoir un corps; & *Puissance*, tout ce qui l'y peut faire servir, ou en general tout ce qui est capable de mouvoir un corps, soit à l'aide d'une Machine, ou non. Tout ce que cette Puissance exerce de force pour cela, s'appelle sa *force absolue*, laquelle se prend aussi pour cette Puissance, lorsque cette force est tout ce que cette même Puissance est capable d'en exercer. Ce qu'il y a de force employée à mouvoir le corps, & en vertu de qui il seroit effectivement mû, si rien ne s'y opposoit, s'appelle la *force de ce corps*. Enfin l'on appelle ici *force relative* d'une Puissance appliquée à une Machine, tout ce qu'il en résulte à cette Machine au point où cette Puissance lui est appliquée. Tout ce que l'on dit ici des Puissances & des Forces, se dira de même des Résistances de ce qui s'oppose à leur action; lesquelles font le même effet que des Puissances ou Forces qui résisteroient précisément, de même que ces obstacles font à celles-là.

II. On appelle *Pesanteur* d'un corps une force (de quelque cause qu'elle lui vienne) qui tend à le mouvoir de haut en bas en ligne droite vers le centre de la Terre; & l'on appelle *Poids* un corps d'une certaine mesure de pesanteur, tel qu'est une livre, deux livres, &c. De sorte que *Pesanteur* d'un corps, & *Poids* du même corps, ne signifieront dans la suite que la même chose.

C'est sur cette mesure que se fait d'ordinaire l'estimation

N O U V E L L E

de toutes les autres Forces moins connues, comme l'estimation des grandeurs Géométriques se fait sur le Pied, la Toise, &c. de sorte que l'on dit d'une force quelconque, qu'elle est d'une Livre, de deux, de trois, &c. comme l'on dit d'une Ligne qu'elle est d'un Pied, de deux, de trois, &c.

III. La Ligne, suivant laquelle une Puissance presse, pousse, ou tire le corps ou la machine à laquelle elle est appliquée, s'appelle la *Ligne de direction* de cette puissance ou force.

IV. On appelle *Impression* (*Momentum*) de cette puissance ou force sur ce corps ou sur cette Machine, ce que la maniere dont elle lui est appliquée lui permet d'action contre l'obstacle à surmonter.

V. Deux ou plusieurs forces sont dites *en Equilibre* entr'elles, lorsqu'agissant l'une contre l'autre, ou contre un obstacle commun, elle ne l'emportent ni l'une sur l'autre, ni sur cet obstacle; c'est-à-dire, lorsque tout demeure en repos, nonobstant l'action de ces forces ou puissances l'une contre l'autre, ou contre l'obstacle qui les arrête, & qu'on appelle *Appui*.

VI. Un mouvement résultant du concours d'action de deux ou de plusieurs forces, s'appelle d'ordinaire *Mouvement composé*: non qu'il le soit de plusieurs autres mouvemens; mais parce qu'il résulte de ce concours de forces comme d'une seule qui seroit composée de ce qu'elles y employent d'action.

A X I O M E S.

I. Les effets sont toujours proportionnels à leurs causes ou forces productrices, puisqu'elles n'en sont les causes qu'autant qu'ils en sont les effets, & seulement en raison de ce qu'elles y causent.

II. Donc des forces ou des résistances égales, suivant les mêmes directions, ont des effets égaux, ou les mêmes; & conséquemment une force égale à une autre, ou à quelque résistance que ce soit, mise à sa place avec la même direction, & en même sens, y doit produire le même effet.

III. Lorsqu'un corps est pressé, poussé, ou tiré tout à la fois par deux forces égales, & directement opposées, il doit rester immobile, c'est-à-dire, en repos, sans autre obstacle que la contrariété de ces forces qui se détruisent, ou s'empêchent également l'une l'autre, chacune soutenant l'autre toute entière.

La même chose se doit dire (*ax. 2.*) d'une force & d'une résistance qui lui seroit égale, & directement opposée.

IV. Si un corps ainsi poussé, pressé, ou tiré par des forces à la fois, reste immobile ou en repos, sans autre obstacle que la contrariété de ces forces; ces mêmes forces seront égales, & directement opposées, c'est-à-dire, égales entr'elles, & suivant une même direction en sens contraires.

La même chose se doit dire (*ax. 2.*) d'une force & d'une résistance, qui malgré cette force, retiendrait en repos le corps que cette même force tendroit à mouvoir.

V. Un corps pressé, poussé, ou tiré tout à la fois par deux forces inégales & directement opposées, doit se mouvoir dans le sens de la plus forte, comme s'il ne l'étoit que par une seule ainsi dirigée & égale à leur différence; ou si quelque obstacle l'en empêche, cet obstacle doit être dans la direction commune de ces deux forces, & d'une résistance égale à leur différence.

VI. Les vitesses d'un même corps, ou de corps de masses égales, sont comme les forces motrices qui y sont employées, c'est-à-dire, qui y causent ces vitesses; réciproquement lorsque les vitesses sont en cette raison, elles sont celles d'un même corps, ou de corps de masses égales.

VII. Les espaces parcourus de vitesses uniformes en tems égaux par des corps quelconques, sont entr'eux comme ces mêmes vitesses; & réciproquement lorsque ces espaces sont en cette raison, ils ont été parcourus en tems égaux.

VIII. Les espaces parcourus en tems égaux par une

même corps, ou par des corps de masses égales, sont comme les forces qui les leur font parcourir; & reciproquement lorsque ces espaces sont en cette raison, ils sont parcourus en tems égaux par un même corps, ou par des corps de masses égales. Cet Axiome-ci est un Corollaire des deux précédens Ax. 6. 7.

Le mot de vitesse dans la suite y signifiera toujours vitesse uniforme, à moins qu'on n'y avertisse du contraire.

D E M A N D E S.

I. Pour traiter géométriquement les Machines dont on parlera dans la suite, qu'il soit permis de les supposer ou imaginer d'abord comme sans pesanteur, sans résistance de frottemens, ni du milieu ou plein, dans lequel on les supposera comme dans le vuide parfaitement mobiles sur leurs axes ou sur leurs pivots, comme sur des lignes ou sur des points Mathématiques dures & roides; excepté les cordes, lesquelles soient parfaitement flexibles dans toutes leurs parties, sans grosseur, sans effort & sans prêter, c'est-à-dire, sans s'accourcir, ni pouvoir être allongées: sauf à y ajouter ensuite pour force, ou à en retrancher ce qui pourroit y avoir de contraire à tout cela, dont on demande seulement qu'il soit permis de faire abstraction.

II. Qu'il soit aussi permis de faire abstraction de la pesanteur d'un corps, & de le considérer comme s'il n'en avoit aucune: sauf à la regarder (ax. 2.) comme une puissance qui lui seroit appliquée, quand on le considérera comme poids, on en avertira. Hors cela quand on parlera d'un corps, on le considérera toujours comme sans pesanteur.

P R I N C I P E G E N E R A L.

Quel que soit le nombre des forces ou des puissances quelconques, dirigées comme l'on voudra, qui agissent à la fois sur un même corps, ou ce corps ne se remuera point du tout, ou il n'ira que par un seul chemin, &

suivant une ligne qui sera la même que si au lieu d'être ainsi poussé, pressé, ou tiré par toutes ces puissances à la fois, ce corps ne l'étoit suivant la même ligne, & en même sens que par une seule force ou puissance équivalente ou égale à la résultante du concours de toutes celles-là.

Ce principe est d'autant plus évident, que rien ne l'est davantage qu'un même corps ne sçauroit aller par plusieurs chemins à la fois; & de quelque vitesse qu'il y aille, il n'ira que comme s'il n'étoit poussé en ce sens que par une seule force capable de lui donner cette vitesse.

C O R O L L A I R E I.

Or si ce corps n'étoit pressé, poussé ou tiré que par une seule force, un obstacle invincible, ou du moins d'une résistance égale à cette force, opposé à ce corps dans la direction de cette même force, l'arrêteroit (ax. 3.) tout court; puisque (hyp.) cette force n'auroit d'action, ni conséquemment ce corps d'impression que suivant ce chemin qui lui seroit alors fermé par cet obstacle. Donc aussi un obstacle invincible, ou du moins d'une résistance égale à la force résultante du concours d'action de tant d'autres quelconques qu'on voudra, & dirigées comme l'on voudra, opposé dans la direction de cette force résultante au corps, sur lequel agissent toutes celles-là, l'arrêtera tout court, & soutiendra ainsi sur lui toutes ces forces ou puissances en équilibre entr'elles.

C O R O L L A I R E II.

Reciproquement, puisqu'un corps ainsi pressé, poussé, ou tiré par tant de puissances à la fois qu'on voudra, quelles qu'elles soient, & dirigées comme l'on voudra, ne le feroit que comme par une seule force égale à la résultante du concours d'action de toutes ces puissances sur ce corps, & dirigée en même sens que cette résultante: si ce corps se trouve arrêté par un obstacle qui empêche toutes ces puissances de se mouvoir, & les met-

te ainsi toutes en équilibre entr'elles , cet obstacle se trouvera toujours (ax. 4.) dans cette direction de la force résultante de leur concours d'action , qu'il soutiendra d'une résistance égale , &c. directement contraire à cette force.

COROLLAIRE III.

Donc l'équilibre sera impossible entre quelque nombre de puissance que ce soit , tant qu'elles ne trouveront point d'obstacle de résistance égale & directement opposée à la force résultante de leur concours ; puisque (corol. 2.) s'il y avoit équilibre entr'elles , il s'y trouveroit toujours un tel obstacle , soit étranger , soit de la part d'une ou de plusieurs de ces puissances contre les autres.

Ces Corollaires du principe general font voir , sur tout le Corol. I. que pour mettre en équilibre entr'elles tant de forces ou puissances quelconques qu'on voudra , qui dirigées à volonté , agissent toutes à la fois sur un même corps , il n'y a plus qu'à trouver , suivant quelle ligne elles doivent s'accorder à le pousser , ou à le tirer toutes ensemble , si on veut lui opposer dans cette ligne un obstacle absolument invincible ; & avec quelle force , si dans cette ligne on ne veut lui en opposer qu'un d'une résistance égale à cette force résultante du concours d'action de tout ce qu'il y en a qui agissent à la fois sur lui.

C'est ce que nous allons trouver par le moyen des mouvemens composez connus des Anciens & des Modernes : Aristote en a fait un Traité dans ses Questions Mécaniques ; Archimede , Nicomede , Dinostrate , Diocles , &c. les ont employez pour la description de la Spirale , de la Conchoïde , de la Cissoïde , de la Quadratrice , &c. Descartes s'en est servi pour expliquer la reflexion & la refraction de la lumiere. En un mot , tous les Mathematiciens se servent des mouvemens composez pour la generation d'une infinité de lignes courbes ; & tous les Physiciens exacts , pour déterminer les forces des chocs ou des percussions obliques , &c. Ainsi je n'y prétends rien que l'usage qu'en indiquai il y a près de 40 ans , & que j'en fais encore ici pour l'explication des Machines.

M E C A N I Q U E.

Ces mouvemens se trouvent démontrez par plusieurs Auteurs : cependant pour ne pas renvoyer le Lecteur à leurs Livres , & pour qu'il n'ait besoin que de celui-ci pour entendre les usages que je vais faire de ces mouvemens ; je vais encore les démontrer ici , & peut-être d'une maniere qui sera celle de quelqu'un de ces Auteurs : mais qu'importe de qui en soient les démonstrations , pourvu qu'elles soient bonnes , puis-que je n'y prétends que l'usage que j'en fais ?

D E F I N I T I O N V I I.

La ligne suivant laquelle plusieurs forces ou puissances s'accordent à pousser ensemble un même corps , s'appellera leur *direction commune* ; & celle suivant laquelle chacune de ces puissances tend à mouvoir ce corps , ou suivant laquelle elle le meuvroit en effet , s'appellera la *direction particuliere* de cette force ou puissance.

C O R O L L A I R E.

Le corps sur lequel ces puissances agissent ainsi à la fois , n'ayant d'impression (*dem. 2.*) que ce qu'il en reçoit de leur concours d'action , leur direction commune sera aussi celle de ce corps.

D E F I N I T I O N V I I I.

Le point de cette direction , dans lequel se réunit l'action de toutes ces puissances sur ce corps , s'appellera son *centre de direction* , & le leur. Tout autre point de cette direction , sur lequel ce corps appuyé demeureroit en repos (*corol. 1. du princ. gener.*) nonobstant l'action de toutes ces puissances sur lui , s'appellera son *centre d'équilibre* , & le leur aussi.

A V E R T I S S E M E N T I.

Quand on dira dans la suite qu'un corps est pressé ; poussé , ou tiré de telle ou telle *force* , ou par telle ou telle *force* , qu'on appellera aussi *puissance* , on n'entendra par cette force que ce que l'Agent qui presse , pousse , ou

tire ce corps, lui en imprime suivant sa direction, & non tout ce que cet Agent en pourroit avoir en le poussant ou en le tirant: par exemple, lorsque la boule A choque ou pousse la boule B, nous ne prendrons pour la force de la boule B, que ce que la boule A lui en imprimera suivant sa direction, & non tout ce que cette boule A en avoit en la choquant: le surplus de ce que la boule A en avoit, n'appartenant point à la boule B, mais seulement ce que cette boule B en reçoit suivant la direction de la boule A. Ainsi par les mots de *force*, ou *puissance motrice* d'un corps, on n'entendra dans la suite que ce qu'il en reçoit de l'Agent qui le pousse ou le tire, & non tout ce que cet Agent en pourroit avoir en le poussant; ou (ce qui revient au même) on ne comptera ici pour *force* ou *puissance motrice* dans l'Agent, que ce qu'il en communique au corps sur lequel il agit: c'est cette mesure de force communiquée, qui sera dans la suite appelée la *force motrice* de ce corps. Ce qui soit dit pour éviter toute équivoque, que j'ai crû avoir évitée en 1687. dans le *Projet* de cette Mécanique-ci, en n'y employant pour Agent que des puissances indiquées par des mains, & non des corps pour mouvoir des corps, ou des poids pour mouvoir des poids. C'est pour cela que l'on n'emploiera ici encore que des mains pour indiquer les puissances, ou les forces dont un corps sera poussé ou tiré, ou dont un poids sera soutenu en équilibre: ce qui me paroît d'autant plus commode en ce cas-ci, que l'imagination se représente bien plus aisément des puissances ou des mains dirigées en tout sens, que des poids qui ne le peuvent être qu'en s'appuyant sur des poulies, dont il faudroit avoir connu les propriétés avant que de les employer; outre que des poulies, aux questions où il ne s'agit pas d'elles, rendroient les figures plus composées, & gêneroient toujours l'imagination.

AVERTISSEMENT II.

On ne suppose ici de Géométrie dans le Lecteur, que la valeur des six premiers Livres & de l'onzième des Elemens d'Euclide ; mais aussi on l'en suppose assez instruit pour n'avoir pas besoin de nous assujettir à les citer dans l'usage que nous en allons faire. S'il arrive qu'on suppose ici quelque chose de plus, on en instruira le jeune Lecteur : par exemple, comme l'on ne trouve pas d'ordinaire dans les Elemens d'Euclide certains signes usitez en Algebre, desquels nous nous servirons quelquefois dans la suite, pour abreger nos démonstrations, & pour moins partager l'esprit de ce Lecteur. Voici l'explication de ce que nous en employerons.

EXPLICATION

De quelques marques ou signes dont on servira dans la suite pour y abreger les démonstrations, & les rendre plus claires.

I. Cette marque $+$ signifie *plus*, ou *addition*: ainsi $7+5$ signifie 7 plus 5, ou 5 ajouté à 7.

II. Celle-ci $-$ signifie *moins*, ou *soustraction*: ainsi $12-4$ signifie 12 moins 4, ou 4 retranchez de 12.

III. Celle-ci \times signifie *multiplication*: ainsi 3×5 signifie 3 multipliez par 5.

La multiplication entr'elles de deux ou de plusieurs grandeurs, appelée (si l'on veut) a, b, c , &c. s'exprimera aussi par la juxta-position arbitraire de ces lettres comme en un seul mot, ainsi que dans l'Algebre, dont nous ne supposons que cela, pour ne rien dire ici qui ne soit à la portée des moindres Géomètres. Ainsi dans la suite par ab , ou ba , on entendra a multiplié par b , ou b par a , de même que par axb ou bxa pareillement, par abc , acb , bac , &c. on entendra également la multiplication entr'elles des trois grandeurs appelées a, b, c , de même que par $axbxc$, $axcxb$, $bxaxc$, &c.

IV. Celle-ci $=$ signifie *égalité* : ainsi $7+5=12$ signifie que $7+5$ est égal à 12 ; de même $12-4=8$ signifie que $12-4$ est égal à 8 ; pareillement $7+5=16-4$ signifie que $7+5$ est égal à $16-4$, chacune de ces deux quantitez étant égale à 12.

V. Celle-ci $>$ ou $<$ signifie *majorité* du côté de son ouverture, & *minorité* du côté de sa pointe : ainsi $12 > 8$ signifie que 12 est plus grand que 8 ; & $8 < 12$ signifie au contraire que 8 est plus petit que 12.

VI. Ces quatre points :: placez après le second des quatre termes d'une analogie ou proportion, dont les trois autres sont suivis chacun d'un point, sont la marque de cette proportion : ainsi $2.4::3.6.$ signifie que 2 sont à 4, comme 3 sont à 6. Et pour exprimer une proportion continue, c'est-à-dire, une suite de raisons ou de rapports semblables, on repete les quatre points de deux en deux termes, en mettant un point après chacun des autres ; par exemple, $2.4::3.6::5.10::7.14::$ &c. signifie que 2 sont à 4, comme 3 à 6, comme 5 à 10, comme 7 à 14, &c.

VII. Si à la place des quatre points :: précédens, placez entre le second & le troisième des quatre termes où ils signifioient *égalité de raison*, on met quelqu'un des deux signes $>$, $<$, il y signifiera *inégalité de raison* : sçavoir, le premier $>$, *majorité de raison*, & le second $<$, *minorité de raison*. Ainsi $5.2 > 6.3.$ signifie que 5 sont à 2 en plus grande raison que 6 à 3. Au contraire, $2.5 < 3.6.$ signifie que 2 sont à 5 en moindre raison que 3 à 6.

VIII. La lettre \int longue sera prise dans la suite pour une marque ou caractéristique qui aura deux significations différentes, selon qu'elle précèdera des angles, ou d'autres grandeurs.

1^o Elle signifiera *sinus* d'un angle, lorsqu'elle le précèdera : par exemple, $\int ABC$ signifiera le *sinus* d'un angle appelé AB.

2^o. Cette même lettre \int longue signifiera aussi la *somme*

de plusieurs autres grandeurs, lorsqu'elle les précédera ; par exemple , $3+5+7=15$ signifiera que la somme de $3+5+7$ vaut 15 ; de même $6+7-5=8$ signifiera que $6+7-5$ valent 8.

On aura soin dans la suite d'avertir dans lequel de ces deux sens cette longue *f* sera prise : mais en cas qu'on oubliât de le faire, ce double sens est (je croi) ici assez marqué pour ne s'y pas méprendre. On ne donne ici cette double signification à cette longue *f*, que parce qu'étant la première lettre des mots de *sinus* & de *somme*, elle sera très-propre à les rendre presens à l'imagination ou à l'esprit ; outre que cette longue *f* italique n'entre d'ordinaire, & n'entrera dans la suite ni dans le calcul, ni dans les figures pour aucune autre signification.

L E M M E I.

Pour préparer l'imagination aux mouvemens composés, PLANC. I^{re}
FIG. I.
concevons le point *A* sans pesanteur uniformément mû vers *B* le long de la droite *AB*, pendant que cette ligne se meut aussi uniformément vers *CD* le long de *AC*, en demeurant toujours parallèle à elle-même, c'est-à-dire, faisant l'angle toujours le même quelconque avec cette ligne immobile *AC* : de ces deux mouvemens commencez en même tems, soit la vitesse du premier à la vitesse du second, comme les côtez *AB*, *AC*, du parallélogramme *ABCD*, le long desquels ils se font. Quel que soit ce parallélogramme *ABCD*, je dis que par le concours des deux forces productrices de ces deux mouvemens dans le mobile *A*, ce point parcourra la diagonale *AD* de ce parallélogramme, pendant le tems que chacune d'elles lui en auroit fait parcourir seule chacun des côtez *AB*, *AC*, correspondans.

D E M O N S T R A T I O N.

Puisque (*hyp.*) la vitesse du point mobile *A* vers *B* le long de la droite mobile *AB*, est à la vitesse qu'il a avec elle vers *CD* :: *AB*. *AC* :: *CD*. *AC* (par un point quel-

conque G de AD soit une parallele KH à CD, laquelle rencontre AC, BD, en K, H,) :: KG. AK. L'ax. 7 fait voir qu'à l'instant que la ligne AB aura parcouru AK, & sera arrivée en KH, le point mobile A aura parcouru sur elle sa partie KG, & sera ainsi pour lors en G sur la diagonale AD du parallelogramme BC : lequel point G ayant été pris indéterminement sur cette diagonale AD, fait voir qu'en quelque point que la ligne mobile AB coupe cette diagonale, le point mobile A y sera toujours ; & conséquemment qu'il sera sur elle en D avec le point B de cette mobile AB, lorsqu'elle sera en CD. Donc par le concours des deux forces productrices des deux mouvemens supposez à ce point mobile A le long de AB & de AC, il parcourra la diagonale AD du parallelogramme ABCD pendant le temps que chacune d'elles lui en auroit fait parcourir seule chacun des côtez AB, AC, correspondans. *Ce qu'il falloit démontrer.*

S C H O L I E.

Un point mû le long d'une ligne qui se meut aussi elle-même, est une chose souvent supposée par les Géomètres pour la generation de plusieurs lignes courbes differentes selon la variabilité des mouvemens supposez à la fois dans le point qui les trace, comme le point mobile A en vient de tracer une droite par le concours de deux mouvemens uniformes. Ce point mobile se conçoit sans peine, en imaginant un corps ainsi mû, & diminué pendant cela par l'imagination, jusqu'à être réduit en un tel point.

L E M M E I I.

Si le point A sans pesanteur est poussé en même tems & uniformement par deux forces ou puissances E, F, toutes employées sur lui, suivant des lignes AC, AB, qui fassent entr'elles quelque angle CAB que ce soit, & que la force ou puissance E suivant AC, soit à la force ou puissance F suivant AB, comme AC est à AB. Ce point A par le concours

de ces deux forces E, F , sans le secours d'aucune ligne mobile, parcourra la diagonale AD du parallélogramme $ABCD$ dans le même tems qu'elles lui en auroient fait parcourir separement les côtez AC, AB , qu'on leur suppose proportionnels.

DEMONSTRATION.

Deux corps mûs ensemble sans s'aider ni se nuire, comme lorsqu'ils le sont d'égales vîteses en même sens, chacun par une force particuliere, l'étant chacun comme s'il se mouvoit seul de la force ou vîtesse qui lui est propre; il est manifeste que le point A poussé suivant AC vers C par la puissance E , l'est de même que si la ligne AB l'étoit en même tems par quelque autre cause qui la mût parallèlement à elle-même suivant AC vers CD , d'une vîtesse égale à celle que la puissance E donneroit seule de A vers C à ce point A ; & qu'alors ce point sans être emporté par cette ligne mobile AB , feroit toujours sur elle ainsi mûe, comme si elle l'emportoit effectivement avec elle, pendant que la force ou puissance F le meuvroit le long de cette même ligne AB , ainsi que dans le Lem. 1. Donc ce point mobile A poussé tout à la fois par les deux puissances E, F , suivant AC, AB , doit se mouvoir de même que si dans le tems que la force F le meut de A vers B le long de la ligne AB , il étoit emporté par cette ligne mûe parallèlement à elle-même le long de AC vers CD , d'une vîtesse égale à celle que la puissance E donneroit seule à ce point A vers C ; c'est-à-dire, (*ax. 6.*) d'une vîtesse qui fût à celle que ce point auroit le long de cette ligne AB :: $E. F$ (*hyp.*) :: $AC. AB$. Or le Lem. 1. fait voir que le point A ainsi mû de A vers B le long de la ligne AB , pendant qu'elle l'emporteroit ainsi vers CD , parcourroit la diagonale AD du parallélogramme BC pendant le même tems que chacune des forces E, F , productrices de ce qu'il a de mouvement en ces deux sens, lui en feroit seul parcourir chacun des côtez AC, AB , correspondans.

Donc sans le mouvement de la ligne AB, supposé seulement pour aider l'imagination, le point mobile A sans pesanteur, poussé tout à la fois suivant les lignes AC, AB, par les deux puissances E, F, supposées en raison de ces deux lignes, & employées (*hyp.*) toutes entières à le mouvoir en ces deux sens, parcourra la diagonale AD du parallelogramme ABCD dans le même tems que chacune de ces deux puissances E, F, lui en feroit seule parcourir chacun des côtez AC, AB, correspondans. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Pour démontrer cela on se contente d'ordinaire du Lem. I. qui y est effectivement suffisant: aussi n'ai-je employé que lui dans le Projet que je donnai en 1687. de cette Mécanique-ci; mais ayant reconnu depuis que quelques Physiciens y trouvoient de la difficulté, dans la pensée où ils étoient que la ligne mobile AB servoit à transporter le point mobile A vers CD, pendant qu'il se meuroit de A vers B: c'est pour démontrer qu'elle y est inutile, & qu'elle ne sert qu'à soutenir ici l'imagination, que j'ajoute ce second Lemme-ci au premier, que je ne repete que pour rendre la démonstration de celui-ci plus courte & plus aisée. En voici les Corollaires.

COROLLAIRE I.

Puisque la force résultante du concours des puissances E, F, fait parcourir la diagonale AD du parallelogramme ABCD, au point mobile A, dans le même tems que chacune de ces forces lui en auroit seule fait parcourir le côté AB, ou AC, suivant lequel elle est dirigée; non seulement ces trois forces doivent avoir leurs trois directions dans un même plan; mais encore la résultante suivant AD du concours d'action des deux autres E, F, dès le premier instant du mouvement qu'en reçoit le point A, doit dès cet instant être à chacune de celles-là (*ax. 8.*) comme cette diagonale AD du parallelogramme BC est à chacun de ses côtez AC, AB, correspondans.

COROLLAIRE

COROLLAIRE II.

C'est donc la même chose (*ax. 2.*) que le point A soit poussé le long de AD par le concours d'action des puissances E, F, ou qu'il y soit poussé par une seule puissance ainsi dirigée, laquelle soit à celles-là comme AD est à AC, AB; puisque cette nouvelle puissance étant (*Corol. 1.*) égale à la résultante du concours d'action de celles-là, & (*hyp.*) dirigée suivant la même AD qu'elle, feroit suivre cette ligne à ce point mobile A (*ax. 2.*) de la même vitesse que la force résultante du concours d'action des supposées E, F, c'est-à-dire, de la même vitesse que ces deux-ci la lui font suivre ensemble. Ainsi un point quelconque mû d'une vitesse uniforme aussi quelconque, & en ligne droite AD, peut également l'avoir été par une seule puissance dirigée en ce sens, ou par le concours de deux autres E, F, dirigées suivant les côtes AC, AB, d'un parallélogramme quelconque BC, dont cette ligne AD, soit la diagonale, & qui soient à cette puissance-là comme ces côtes correspondans sont à cette diagonale.

COROLLAIRE III.

Il suit aussi de ce Lemme-ci, que si la force ou l'impression résultante du concours d'action des deux puissances E, F, dirigées suivant AP, AQ, se trouve dirigée suivant AO, tout parallélogramme BC, dont la diagonale AD sera sur cette droite AO, & les côtes AC, AB, sur AQ, AP, aura ces mêmes côtes AC, AB, entr'eux en raison des deux puissances E, F, dont ils sont (*hyp.*) les directions: autrement l'impression résultante du concours d'action de ces deux puissances, ne se feroit pas suivant la diagonale AD du parallélogramme BC, ainsi qu'on le suppose; mais (*Lem. 2.*) suivant celle d'un autre parallélogramme, dont les côtes aussi pris sur les directions AQ, AP, de ces deux puissances E, F, seroient entr'eux comme ces mêmes puissances.

COROLLAIRE IV.

Donc aussi lorsque l'impression résultante du concours d'action des puissances E, F , dirigées suivant AQ, AP , se fait suivant AO ; tout parallélogramme BC , dont la diagonale AD sera sur cette droite AO , & ses côtes AC, AB , sur AQ, AP , aura cette diagonale AD à chacun de ces côtes AC, AB , comme cette impression résultante du concours d'action des puissances E, F , sera à chacune d'elles: puisque ces deux puissances E, F , étant alors entr'elles (*Corol. 3.*) comme ces côtes AC, AB , correspondans, seroient aussi pour lors à l'impression résultante de leur concours d'action, comme ces mêmes côtes AC, AB du parallélogramme BC , seroient à la diagonale AD .

COROLLAIRE V.

Le même raisonnement qui dans la démonstrat. du présent Lem. 2. vient de prouver que le point mobile A doit parcourir la diagonale AD par le concours d'action des deux forces E, F , supposées entr'elles comme les côtes AC, AB , du parallélogramme BC , suivant lesquels on les suppose aussi dirigées: ce même raisonnement, dis-je, prouvera que le même point A poussé à la fois par deux autres puissances dirigées suivant les côtes AM, AN , d'un autre parallélogramme quelconque MN qui auroit la même diagonale AD que celui-là, & entr'elles en raison de ces deux côtes AM, AN ; parcourroit encore par leur concours d'action cette diagonale AD du parallélogramme MN dans le même tems que séparément elles lui en feroient parcourir les côtes, chacune celui suivant lequel elle seroit dirigée. De sorte que si ces deux nouvelles forces suivant AM, AN , étoient aux deux premières E, F , comme AM, AN , sont à AC, AB , étant alors séparément capables (*ax. 8.*) de faire parcourir au point A les côtes correspondans AM, AN , du parallélogramme MN , dans le même tems que les forces

E, F, séparément aussi lui feroient parcourir les correspondans AC, AB du parallélogramme BC; elles feroient aussi ensemble parcourir à ce point A la diagonale commune AD dans le même tems que les deux forces E, F, la lui feroient parcourir ensemble. Par conséquent (ax. 8.) la force résultante du concours d'action de ces deux-là, feroit alors égale à la résultante du concours d'action de ces deux-ci. Il en sera de même de toutes autres forces qui agiroient deux à deux sur le même point A, suivant les côtes de tout autre parallélogramme qui auroit la même diagonale AD, & qui feroient non seulement entr'elles comme les côtes de ce parallélogramme, suivant lesquels elles feroient dirigées; mais encore aux autres puissances prises de même deux à deux, comme ces côtes correspondans de ce parallélogramme aux correspondans des leurs. D'où l'on voit (Corol. 2.) qu'il n'y a point de mouvement uniforme en ligne droite, qui ne puisse également être l'effet d'une seule puissance, ou du concours d'action d'une infinité d'autres prises deux à deux de cette manière-là.

Ce qu'on dit ici des mouvemens uniformes en lignes droites, se pourroit appliquer à toutes sortes d'autres mouvemens, mais cela nous écarteroit de notre sujet.

C O R O L L A I R E VI.

Si le point mobile A, au lieu d'être poussé (comme ci-dessus) par deux forces ou puissances seulement, l'étoit tout à la fois par tant de puissances quelconques qu'on voudra, dirigées suivant les lignes AC, AB, AM, AN, &c. menées à volonté dans un ou plusieurs plans, lesquelles puissances fussent entr'elles comme ces lignes, & conséquemment (ax. 8.) capables séparément de les faire parcourir chacune la sienne à ce point A en tems égaux. Si sous deux AC, AB, de ces deux lignes, choisies à volonté, on fait le parallélogramme BC avec sa diagonale AD; ensuite sous AD, & sous cette AM qu'on voudra des autres proportionnelles aux puissances sup-

Cij

posées, le parallélogramme DM avec sa diagonale AL; de même sous AL, & sous celle AN qu'on voudra de ces proportionnelles restantes, le parallélogramme LN avec sa diagonale AP, &c. on verra suivant ce qui précède, que toutes ces forces ou puissances conspireroient ensemble à faire parcourir au point A la dernière diagonale, qui est ici AP, dans le même tems que séparément elles lui feroient parcourir chacune celui des côtes de ces parallélogrammes, suivant lequel elle seroit dirigée.

Car suivant le présent Lem. 2. ce point mobile A parcourroit la diagonale AD du parallélogramme BC en vertu de la force résultante du concours des dirigées suivant AC, AB, dans le même tems que chacune de celles-ci lui en feroit parcourir séparément le côté AC ou AB suivant lequel elle est dirigée. De même ce point A parcourroit la diagonale AL du parallélogramme DM dans ce même tems par le concours de cette résultante suivant AD, & de la dirigée suivant AM; & conséquemment en vertu de la résultante du concours des trois dirigées suivant AC, AB, AM. Pareillement ce même point A parcourroit encore AP pendant ce même tems, par le concours de cette dernière résultante suivant AL, & de la dirigée suivant AN; & conséquemment aussi en vertu de la résultante du concours des quatre dirigées suivant AC, AB, AM, AN; & ainsi toujours quelque soient le nombre, les directions & les quantitez ou les rapports des puissances qui agissent à la fois sur ce point mobile A. D'où l'on voit que par le concours d'action de toutes, ce point A suivra toujours la diagonale du dernier des parallélogrammes faits comme ci-dessus, & la parcourra dans le même tems que chacune de ces puissances séparément lui auroit fait parcourir celui des côtes de ces parallélogrammes suivant lequel elle est dirigée.

COROLLAIRE VII.

Suivant le Corol. 1. la force du point A suivant AD

résultante du concours des dirigées suivant AC , AB , étant à celles-ci comme AD est à AC , AB ; ce que ce point en a suivant AL par le concours de cette résultante suivant AD , & de la dirigée suivant AM , étant de même à celles-ci comme AL est à AD , AM ; ce qu'il en a suivant AP par le concours de la précédente suivant AL , & de la dirigée suivant AN , étant pareillement à celles-ci comme AP est à AL , AN , &c. Il s'ensuit que cette dernière force du point A suivant AP , résultante du concours d'action de toutes les supposées dirigées suivant les côtes AC , AB , AM , AN , des parallélogrammes précédens, & entr'elles en raison de ces côtes, sera toujours à chacune de celles-ci comme cette dernière diagonale AP sera à chacun de ces côtes correspondans; & ainsi de même des résultantes du concours de tant d'autres puissances quelconques qu'on voudra supposer agir en même tems sur le point mobile A , quelqu'en soient aussi les directions.

S C H O L I E.

I. On vient de voir dans la démonstration du présent Fig. 1. Lem. 2. que le point mobile A poussé à la fois suivant AC , AB , par deux forces ou puissances E , F , en raison de ces deux côtes AC , AB du parallélogramme $ABCD$ de la Fig. 1. doit se mouvoir suivant la diagonale AD de ce parallélogramme, de même que si mû de A vers B par la force F le long de AB , qui fût une ligne mobile, il étoit emporté en même tems par elle mûe parallèlement à elle-même le long de AC vers CD d'une vitesse qui fût à celle de ce point A le long de cette ligne mobile AB , comme AC est à AB ; ainsi que dans le Lemme 1. Cela étant, ces deux Lemmes reçûs de tous les Géomètres, deviendront sensibles aux Physiciens qui savent quelque chose des proportions, si au lieu du point mobile A ils imaginent une Fourmi qui se meuve uniformément de A vers B le long de la Règle AB , pendant que cette Règle coule de là uniformément, & pa-



rallelement à elle-même le long de AC vers CD, d'une vitesse qui soit à la vitesse de la Fourmi sur cette Règle, comme AC est à AB; car tout le reste demeurant le même que dans la Fig. 1. dont il s'agit ici, ces Physiciens verront alors de cette Fourmi, comme on l'a démontré du point mobile A dans le Lem. 1. que lorsque la Règle AB sera arrivée en KH, la Fourmi aura parcouru KG sur elle, & conséquemment sera pour lors en G sur la diagonale AD. Ils verront de même qu'en quelqu'autre endroit de AC que la Règle AB se trouve, la Fourmi sera toujours sur la diagonale AD, dans le point où cette diagonale sera coupée par cette Règle; & enfin en D, lorsque cette Règle AB sera en CD. On voit en cela deux mouvemens distincts de la Fourmi vers BD, CD, réunis en un suivant AD, & reciproquement.

Fig. 2. II. Imaginons de plus dans la Fig. 2. du Corol. 6. que pendant que la Fourmi parcourt ainsi la diagonale AD du parallelogramme ACDB par le concours de ses mouvemens vers les côtez BD, CD de ce parallelogramme: imaginons, dis-je, que cette diagonale AD est alors emportée parallelement à elle-même le long de AM d'un mouvement uniforme qui la porte en M pendant le même tems que la Fourmi employe à parcourir cette même AD; on verra encore, comme ci-dessus, que cette Fourmi parcourra la diagonale AL du parallelogramme ADLM dans ce même tems par le concours de ses deux mouvemens suivant AD, AM: ainsi son mouvement suivant AD venant de résulter (art. 1.) du concours de ses mouvemens suivant AB, AC; on voit que son mouvement suivant AL doit ici résulter du concours des trois suivans AB, AC, AM.

De même si pendant que cette Fourmi parcourt ainsi AL par le concours de ces trois mouvemens uniformes, cette ligne ou règle AL est transportée parallelement à elle-même suivant AN d'un mouvement aussi uniforme qui lui fait parcourir AN pendant le tems qu'elle est elle-même parcourüe par la Fourmi; cette même Four-

mi parcourra aussi pendant ce même tems la diagonale AP du parallelogramme ALPN par le concours de son mouvement suivant AL, & de celui de cette Règle AL suivant AN; & conséquemment le mouvement de cette Fourmi suivant AL venant de résulter des trois suivant AB, AC, AM, celui qu'elle aura ici suivant AP, lui résultera des quatre uniformes suivant AB, AC, AM, AN, qu'on lui voit effectivement avoir par rapport à leurs paralleles en parcourant ainsi AP: il en sera toujours de même jusqu'à la dernière diagonale de tout ce qu'il pourroit y avoir ici d'autres parallelogrammes construits comme dans le Corol. 6. De sorte qu'en parcourant ainsi cette dernière diagonale, cette Fourmi aura à la fois toutes les déterminations exprimées par les directions de tout ce que ces parallelogrammes auront de côtes par le point A, & avec des forces ainsi dirigées, qui seront entr'elles comme ces côtes.

III. Voilà donc dans la nature tout le contenu du present Lem. 2. & de ses Corollaires, fondement de toute la doctrine des mouvemens composez employez (comme j'ai déjà dit) par Archimede dans la description de la spirale, & par plusieurs autres Géometres du premier ordre, tant anciens que modernes, pour la description d'une infinité d'autres lignes courbes: voilà à la portée de tout le monde une multiplicité de déterminations à la fois dans un même corps, d'autant plus grande, qu'il y aura ici plus de parallelogrammes faits, ou imaginez faits de Régles mobiles comme ci-dessus. Cette multiplicité de déterminations à la fois dans un même corps, s'offre même tous les jours aux yeux de tout le monde: on la voit dans chaque clou, & même dans chaque point de la circonference des rouës de carrosses, de chariots & de charettes, qui avancent en roulant: on la voit dans un homme qui dans un vaisseau y marche en tout autre sens que celui du vaisseau: on la voit dans toutes les parties de notre corps, lesquelles outre le mouvement commun du marcher, ont encore leurs mouvemens par-

ticuliers : on la voit généralement dans tout corps mis sur un autre, qui se meut aussi lui-même sur un autre, lequel se meut encore sur un autre, celui-ci encore sur un autre, & ainsi de tant de corps qu'on voudra, qui transportez les uns par les autres, se meuvent en sens differens, dont celui qui est porté par tous les autres, & qui n'en porte aucun, a toutes les déterminations à la fois. Cette multiplicité de déterminations dans un même corps est enfin si fréquente dans la nature, où une infinité de mouvemens résultent du concours de plusieurs chocs, qu'il y a lieu de croire qu'il ne s'y fait presque rien que par des compositions de mouvemens; & qu'ainsi le present Lem. 2. n'est pas seulement vrai, mais aussi très-propre à expliquer la plupart des mouvemens de la nature, & à déterminer ce qui les doit empêcher, & y causer l'équilibre dont il s'agira dans la suite.

IV. Il faut pourtant avouer que ceux qui croyant sur la parole de M. Descartes, qu'il se conserve toujours une égale quantité de mouvement dans le monde, pensent qu'il ne s'y en détruit point du tout, ne s'accommodent pas de ce Lemme 2. lequel prouvant (*Corol. 1.*) que la force résultante du concours d'action de deux autres quelconques dirigées suivant les côtes de quelqu'angle que ce soit, est toujours moindre que la somme de ces deux forces generatrices, & d'autant moindre que cet angle est plus obtus, prouve aussi (*Ax. 1.*) qu'il doit toujours alors y avoir une perte de mouvement d'autant plus grande : ils sont autant effrayez de cette perte d'un simple mode, que s'il s'agissoit d'une substance anéantie. Mais qu'ils s'en prennent à la Nature & à la raison, qui démontre ce Lem. 2. Ou si l'autorité de M. Descartes fait plus d'impression sur eux, qu'ils considerent que ce grand Géometre encore plus que Philosophe, a tellement admis ce Lemme, que c'est sur lui qu'il a établi tout ce qu'il a dit de la Reflexion & de la Refraction de la lumière dans la Dioptrique, sans
compter

compter l'emploi qu'il en a fait dans plusieurs endroits de ses Lettres, & ailleurs.

V. Ce qui doit pourtant consoler ces Cartesiens, c'est Fig. 7. que s'il se perd du mouvement dans les composez, il en renaît aussi de nouveau dans leur décomposition, en vertu des différentes déterminations qu'on y a vûes dans les art. 1. 2. 3. Car puisque le corps dur A, par exemple, poussé en même tems par deux autres durs E, F, suivant les côtez AB, AC, du parallelogramme BC, avec des forces capables séparément chacune de lui faire parcourir chacun de ces côtez en tems égaux, en parcourroit (*Démonstr. du Lem. 2.*) par leur concours, & en pareil tems la diagonale AD, de même que si au lieu d'être ainsi poussé, il parcourroit de A vers B, la Règle AB de la vîtesse que le seul corps F lui auroit donnée en ce sens, pendant que cette Règle toujours parallele à elle-même, l'emporteroit vers CD de la vîtesse que le seul corps E auroit donnée vers là à ce corps A : il est visible que lorsque ce corps A arrivera en D avec la Règle AB en CD, s'il y rencontre deux autres corps durs *f, e*, sur les lignes CD, BD, prolongées, son mouvement suivant cette Règle AB, c'est-à-dire alors, suivant CD, lui fera pousser en ce sens le corps *f* de la force dont il la parcourt ; & que celui qu'il a avec cette Règle suivant BD, lui fera pareillement pousser en ce sens le corps *e* de la force dont ce corps A se meut avec cette Règle. Donc ces corps *f, e*, doivent effectivement être poussez par le corps A en arrivant en D suivant AD par le concours d'action des corps F, E, qui (*Hyp.*) le choquent à la fois. Par conséquent la force qui lui résulte du concours de celles qu'il communique ainsi aux corps *f, e*, étant moindre (*Corol. 1.*) que leur somme, & égale à ce qu'il en perd par cette communication qu'on voit résulter de son choc contre ces deux corps *f, e*, à la fois ; il suit qu'alors il leur communique plus de force, & conséquemment aussi (*Ax. 1.*) plus de mouvement qu'il n'en perd par cette communication. Donc s'il y a (*art. 4.*) du

mouvement perdu dans le choc simultanée des deux corps E, F, contre le corps A, il y en a aussi de regagné dans le choc de ce corps A contre les deux corps *e, f*, à la fois.

VI. Il est vrai qu'il ne leur en donne pas tant que les corps E, F, en ont perdu en le choquant: un corps dur qui en choque un autre pareillement dur, ne lui communiquant jamais tout son mouvement: mais les corps *e, f*, en pourront de même (*art. 5.*) donner à d'autres plus qu'ils n'en perdront, ceux-ci encore à d'autres, & ainsi à l'infini; outre que ce gain pourroit même se faire sans aucune perte précédente, si le corps A étoit poussé suivant AD contre les corps *e, f*, par une seule force simple égale à la résultante du concours des chocs de E, F, contre lui, l'effet de cette force unique étant la même chose (*Corol. 2.*) que celui de ce concours. D'où l'on voit dans le choc des corps durs, que par cette décomposition (*art. 5.*) de mouvemens il peut fort bien y avoir à peu près autant de gain de forces ou de mouvemens, que de perte (*art. 4.*) par leur composition; ce qui suffit pour l'explication des Phenomenes: Des corps à ressort l'auroient fait voir dans une moindre suite de chocs; mais il auroit fallu toujours revenir aux petits corps durs qui en causent le ressort.

Une telle compensation de gain & de perte de mouvement, pouvant en conserver dans le monde une quantité moralement égale; les Cartesiens effrayez de ce qui s'en perd (*Corol. 1.*) dans les mouvemens composez, doivent se rassurer d'autant plus que cette égalité morale est suffisante & beaucoup plus propre pour l'explication des Phenomenes, que la Métaphysique & rigoureuse supposée par M. Descartes pour l'établissement des Régles du mouvement, dont la plupart se trouvent fausses par les autres principes même de cet Auteur.

Au reste, je ne me suis tant étendu ici sur cet article, que pour satisfaire un Cartesien que la perte de mouvement qui se fait (*art. 4.*) dans les composez, a soulevé

contre ces fortes de mouvemens dans les *Nouvelles de la Republique des Lettres* du mois d'Avril 1705. art. 2. pag. 389. & suiv.

Quoique les Lemmes & les Corollaires qui précèdent, ne soient que pour des points mûs chacun par le concours de plusieurs puissances quelconques dirigées à volonté ; l'application qu'on vient de faire à des corps dans le Scholie précédent, ne laisse pas de valoir, ces corps pouvant être pris si petits qu'on voudra. Voici présentement pour toutes sortes de corps, grands ou petits, mûs de même par le concours de plusieurs puissances quelconques dirigées à volonté.

L E M M E III.

Soit présentement un corps quelconque EFGH sans pesanteur, poussé par le concours de deux puissances E, F, appliquées comme l'on voudra en E, F, suivant de directions EC, FB, qui fassent entr'elles en A quelque angle CAB que ce soit, dont les côtez AC, AB, soient entr'eux comme ces puissances E, F, soit de ces côtez fait le parallélogramme ABDC, sur la diagonale AD, duquel soit MN perpendiculaire en A, & rencontrée en M, N, par BM, CN, parallèles à cette diagonale AD, sur laquelle prolongée (s'il est nécessaire) soient aussi BP, CQ, perpendiculaires en P, Q. Cela fait, & la diagonale AD (prolongée ou non) passant par quelqu'un des points du corps EFGH, je dis,

I. Que ce corps EFGH reçoit de chacune des puissances E, F, deux impressions à la fois : sçavoir, de la seule puissance E, deux impressions suivant AQ, AN, dont les forces sont à cette puissance E, comme ces côtez AQ, AN du parallélogramme NQ sont à la diagonale AC ; & de même de la puissance F, deux impressions suivant AP, AM, dont les forces sont aussi à cette puissance F, comme ces côtez AP, AM, du parallélogramme AP sont à la diagonale AB.

II. Que ce que la puissance E employe de force, ou fait d'effort suivant AD sur ce corps EFGH, est à ce que la puis-

sance F en fait sur lui suivant la même ligne, pour ou contre, comme AQ , est à AP .

III. Que le surplus de force suivant AN , AM , des puissances E , F , se détruit ou s'empêche toujours mutuellement.

IV. Qu'enfin le corps $EFGH$ ainsi poussé par ces deux puissances E , F , à la fois, parcourra la diagonale AD du parallélogramme BC , ou la valeur de cette diagonale suivant sa direction de A vers D , par le concours d'action de ces deux puissances E , F , dans le même tems que séparément elles lui auroient fait parcourir les côtes correspondans AC , AB , de ce parallélogramme, ou des longueurs équivalentes à ces côtes suivant leurs directions de A vers C , B .

DEMONSTRATION.

PART. I. Soient ET , EV , perpendiculaires en T , V , à CN , CQ , prolongées; & FR , FS , perpendiculaires aussi en R , S , à BM , BP , prolongées, s'il est nécessaire. (Corol. 2. du Lem. 2.) La puissance E dirigée (Hyp.) suivant EC , fait seule sur le point E du corps $EFGH$ la même impression que deux autres puissances feroient ensemble sur ce point, l'une suivant EV , l'autre suivant ET , à chacune desquelles dirigées suivant ces lignes, la puissance E feroit comme EC à chacune de ces mêmes lignes EV , ET . Le corps $EFGH$ reçoit donc en son point E deux impressions différentes à la fois de la seule puissance E : sçavoir, une suivant EV , ou AQ , d'une force qui est à celle de cette puissance E (Lem. 2. Corol. 1.) :: $EV.EC::AQ.AC$. Et l'autre suivant ET ou AN , d'une force qui est aussi à cette même puissance E (Lem. 2. Corol. 1.) :: $ET.EC::AN.AC$. On démontrera de même que ce même corps $EFGH$ reçoit en son point E deux impressions différentes à la fois de la seule puissance F : sçavoir, une suivant FS ou AP , d'une force qui est à celle de cette puissance F :: $FS.FB::AP.AB$. Et l'autre suivant FR , ou AM , d'une force qui est aussi à cette même puissance F :: $FR.FB::AM.AB$. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

PART. II. Cela étant, si l'on appelle Q, N, ce que la puissance E employe ainsi de forces ou fait d'efforts suivant AQ, AN, sur le corps EFGH; & P, M, ce que la puissance F en fait de même sur lui suivant AP, AM; l'on aura ici $Q.E::AQ.AC$. Et $P.F::AP.AB$. Donc (en raison ordonnée entre ces deux dernières analogies) l'on aura ici $P.E::AP.AC$. ou $E.P::AC.AP$. Donc aussi (en raison ordonnée entre cette dernière analogie & la première de toutes) l'on aura pareillement ici $Q.P::AQ.AP$. C'est-à-dire, suivant les noms précédens, que ce que la puissance E employe de force ou fait d'effort (Q) sur le corps EFGH suivant la diagonale AD, du parallelogramme BC, est à ce que la puissance F en fait (P) sur ce corps suivant la même direction sur ce corps en même sens, ou en sens contraire, comme AQ est à AP. *Ce qu'il falloit 2^o. démontrer.*

PART. III. La Part. I. donnant encore suivant les noms précédens de la Part. 2. $N.E::AN.AC$. Et $M.F::AM.AB$. La supposition qu'on fait ici de $F.E::AB.AC$. donnera (en raison ordonnée entre ces deux dernières analogies) $M.E::AM.AC$. ou $E.M::AC.AM$. Donc (en raison encore ordonnée entre cette dernière analogie, & la première de toutes celles-ci) l'on aura pareillement ici $N.M::AN.AM$. De sorte que les triangles (*constr.*) semblables APB, DQC, qui ont $AB=CD$, & $AB.CD::BP.CQ::AM.AN$. donnant ainsi $AM=AN$, donnent aussi $M=N$: c'est-à-dire, les efforts M, N, suivant AM, AN, des puissances F, E, non seulement directement contraires, mais encore toujours égaux entr'eux. Donc (*Ax. 3.*) ces efforts M, N, se détruisent ou s'empêchent toujours mutuellement. *Ce qu'il falloit 3^o démontrer.*

PART. IV. Puisque la Part. 2. donne $Q.P::AQ.AP$. l'on aura aussi $Q.P::AQ.AQ+AP$. Mais on voit dans cette Part. 2. que la Part. I. donne $E.Q::AC.AQ$. Donc (en raison ordonnée) $E.Q+P::AC.AQ+AP$. Or le parallelogramme BC, & les angles (*constr.*)

droits en P, Q, rendant les triangles APB, DQC, semblables & égaux en tout, donnent $AP=DQ$. Donc aussi $E. Q+P::AC. AQ+DQ$. sçavoir, $E. Q+P::AC. AQ+DQ::AC. AD$. dans les Fig. 4. 6. Et $E. Q-P::AC. AQ-DQ::AC. AD$. dans les Fig. 5. 7. Or (*Part. 1. 2. 3.*) la somme $Q+P$ des forces P, Q, dans les Fig. 4. 6. & leur différence $Q-P$ dans les Fig. 5. 7. est tout ce que les puissances E, F, dirigées suivant leurs proportionnelles AC, AB, en imprimant par leur concours d'action au corps EFGH. Donc ce corps sera ici poussé de A vers D suivant AD par le concours de ces deux puissances E, F, & d'une force à laquelle elles seront comme les côtez correspondans AC, AB du parallelogramme ABCD sont à la diagonale AD. Donc aussi (*Ax. 8.*) ce corps EFGH, libre d'ailleurs, parcourra la diagonale AD du parallelogramme BC, ou une longueur équivalente suivant la même direction de A vers D, par le concours d'action de ces deux puissances E, F, dans le même tems que chacune d'elles séparément lui auroit fait parcourir les côtez correspondans AC, AB, de ce parallelogramme, lesquels leur sont (*Hyp.*) proportionnels, ou des longueurs équivalentes suivant leurs directions de A vers C, B. *Ce qu'il falloit 4°. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Des forces égales suivant les mêmes directions ayant (*Ax. 2.*) les mêmes effets, c'est la même chose que le corps EFGH soit poussé en ses points E, F, par les puissances E, F, suivant EC, FB, ou qu'il soit tiré en ses points G, H, par les mêmes puissances, ou par d'égales suivant les mêmes directions GC, HB. Donc soit que ce corps EFGA soit poussé, ou tiré à la fois vers C, B, suivant les directions AC, AB, par deux puissances E, F, ou G, H, qui soient entr'elles comme ces côtez du parallelogramme ABCD.

1°. Ces deux puissances E, F, lui donneront ensemble par leur concours d'action (*Part. 4.*) une impression

ou force de A vers D suivant la diagonale AD de ce parallélogramme BC, capable de la lui faire parcourir, ou une longueur équivalente en même sens de A vers D, dans le même tems que chacune d'elles séparément lui auroit fait parcourir chacun des côtez AC, AB de ce parallélogramme, lesquels leur sont (*Hyp.*) proportionnels; & conséquemment les directions de ces deux puissances E, F, & de la force résultante de leur concours, seront toutes trois dans un même plan.

2°. Cette force résultante du concours de ces deux puissances E, F, ou G, H, à ce corps AFGH suivant cette diagonale AD du parallélogramme BC, sera donc (*Ax. 8.*) à chacune de ces deux puissances, comme cette diagonale AD à chacun des côtez correspondans AC, AB de ce parallélogramme, proportionnels (*Hyp.*) à ces puissances, desquelles ils sont aussi (*Hyp.*) les directions.

3°. Ce que chacune de ces deux puissances E, F, ou G, H, employe de force ou fait d'effort suivant cette même ligne AD en même sens dans les Fig. 4. 6. ou en sens contraires dans les Fig. 5. 7. est (*Part. 2.*) à chacune d'elles comme chacune des parties AQ, AP, de cette même ligne AD, prolongée dans les Fig. 5. 7. est à chacun des côtez correspondans AC, AB du parallélogramme ABCD.

4°. Ce que ces deux puissances E, F, ou G, H, emploient de force sur le corps EFGH suivant AD, étant tout ce que leur concours d'action sur lui leur en laisse; puisque (*Part. 3.*) le surplus de ce qu'elles en auroient séparément suivant AN, AM, se détruit ou s'empêche mutuellement par son égalité & contrariété directe: si l'on arrête ou détruit aussi cette force ou impression commune suivant AD, en lui opposant directement un obstacle invincible, ou du moins qui lui soit égal en quelque point X, où cette direction AD prolongée rencontre le corps E, F, G, H; ces deux puissances E, F, ou G, H, demeureront en équilibre entr'elles avec ce corps en repos sur cet appui X, sans qu'aucune d'elles se puisse

faire pancher ou mouvoir d'aucun côté, chacune d'elle se trouvant alors entièrement épuisée de force par une extinction de leurs composantes suivant AN , AQ , pour la première E ou G de ces deux puissances, & suivant AM , AP , pour la seconde F ou H .

5°. Enfin de ce que les efforts de A vers D suivant AD , des puissances E , F , sont en general (*Part. 2.*)
 $:: AQ \cdot AP :: AQ \times AD \cdot AP \times AD$. Il suit que si l'angle BAC des directions de ces puissances est droit, par exemple, dans quelqu'une des Fig. 4. 6. un tel angle rendant $\overline{AC}^2 = AQ \times AD$, & $\overline{AB}^2 = AP \times AD$, les efforts suivant AD , de ces deux puissances E , F , seront aussi pour lors entr'eux $:: \overline{AC}^2 \cdot \overline{AB}^2$. c'est-à-dire (*nomb. 2.*) comme les quarrés de ces mêmes puissances.

COROLLAIRE II

Il suit de ce Corol. 1. nomb. 1. que tant que les directions de deux forces ou puissances qui agissent ensemble sur un même corps, seront ensemble quelqu'angle entr'elles, ce corps doit se mouvoir suivant une troisième ligne à travers de cet angle du côté que ces deux forces ou puissances conspirent à le pousser ou à le tirer, à moins que quelque obstacle ne s'y oppose comme dans le nomb. 4. de ce Corol. 1. Par conséquent s'il arrive que ce corps ainsi poussé ou tiré demeure en repos, sans que rien d'ailleurs l'empêche d'être mû par le concours d'action des deux puissances qui le poussent ou le tirent, il faut,

1°. Que ces deux puissances soient dirigées suivant une même ligne droite.

2°. Qu'elles y agissent en sens contraires; autrement elles s'accorderoient à le mouvoir suivant cette ligne.

3°. Qu'elles soient égales entr'elles; autrement il s'y mouvrait encore (*4x. 5.*) dans le sens de la plus forte des deux.

Ainsi lorsqu'un corps poussé ou tiré par deux forces
à la

à la fois, ne laisse pas de demeurer en repos, & elles en équilibre sur lui, sans qu'aucun obstacle étranger les y retienne comme dans le nomb. 4. du Corol. 1. ou autrement; il faut nécessairement alors que ces deux forces agissent en sens contraires suivant une même ligne droite, & qu'elles soient égales entr'elles.

C O R O L L A I R E I I I.

Il suit de même du Corol. 1. nomb. 1. qu'un poids attaché au bout d'une corde accrochée par l'autre bout à un clou, ou sur un pieu mobile autour d'un appui, & sans autre obstacle que la résistance de cette corde ainsi attachée, ou de ce pieu ainsi appuyé, ne s'arrêtera en repos que lorsque la direction de sa pesanteur sera en ligne droite avec la leur; & qu'alors leurs résistances seront égales chacune à sa pesanteur.

C O R O L L A I R E I V.

Il suit de plus du Corol 1. nomb. 1. que non seulement l'impression résultante du concours d'action des puissances E, F, ou G, H, dirigées suivant les côtez AZ, AY, d'un angle quelconque ZAY, doit le faire suivant une ligne droite AO, qui passe à travers cet angle; mais encore que tout parallélogramme BC, dont la diagonale AD sera sur cette droite AO, & les côtez AC, AB, sur AZ, AY, aura ces mêmes côtez AC, AB, entr'eux en raison des puissances E, F, en G, H, dont ils sont (*Hyp.*) les directions: autrement l'impression résultante du concours d'action de ces deux puissances sur le corps EFGH, ne se feroit pas suivant la diagonale AD du parallélogramme BC; ce qui est contre l'hypothese: mais (*Corol. 1. nomb. 1.*) suivant celle d'un autre parallélogramme, dont les côtez pris aussi sur les directions AZ, AY, de ces deux puissances E, F, ou G, H, seroient entr'eux en raison de ces deux mêmes puissances.

COROLLAIRE V.

Donc aussi lorsque l'impression résultante au corps EFGH du concours d'action de ces deux puissances E, F, ou G, H, dirigées suivant AZ, AY, se fait suivant AO, tout parallélogramme BC, dont la diagonale AD est sur AO, & les côtes AC, AB, sur AZ, AY, aura cette diagonale AD à chacun de ces côtes AC, AB, comme l'impression résultante du concours de ces deux puissances E, F, ou G, H, fera à chacune d'elles; puisque ces deux puissances étant alors entr'elles (*Corol. 4.*) comme ces côtes correspondans AC, AB, sont aussi (*Corol. I. nomb. 2.*) à l'impression résultante de leur concours d'action sur le corps EFGH, comme ces mêmes côtes AC, AB, du parallélogramme BC sont à sa diagonale AD.

COROLLAIRE VI.

Il suit aussi du *Corol. I. nomb. 2.* que le corps EFGH ainsi poussé ou tiré suivant AD, par le concours des puissances E, F, ou G, H, dirigées suivant leurs proportionnelles AC, AB, l'est de même que s'il l'étoit en ce sens de A vers D suivant la même AD par une seule puissance qui fût à chacune de ces deux-là comme cette diagonale AD du parallélogramme BC est à chacun de ses côtes correspondans AC, AB; & réciproquement.

D'où l'on voit que la pesanteur d'un corps suivant la direction AD, ne fait sur lui que ce qu'y feroient ensemble deux puissances ou forces dirigées suivant les côtes AC, AB, d'un parallélogramme quelconque BC, dont cette direction AD seroit diagonale, & qui feroient à la pesanteur de ce corps comme ces côtes AC, AB, feroient à cette diagonale AD. Et comme cette diagonale peut être celle d'une infinité de parallélogrammes différens, on voit aussi que la pesanteur d'un corps pourroit résulter d'un concours d'une infinité de forces prises ainsi deux à deux: & comme chacune de celles-ci pour-

roit de même résulter de deux autres, chacune desquelles pourroit aussi résulter de deux autres, & ainsi à l'infini; il est visible que la pesanteur d'un corps lui peut résulter du concours de plusieurs forces différentes issues de chocs faits contre lui par plusieurs parties à la fois du fluide dans lequel il pèse ou tombe; il y a même bien de l'apparence que c'est la cause de sa pesanteur.

COROLLAIRE VII.

Suivant le précédent Corol. 6. un corps dur A sans pesanteur, poussé par une seule force ou puissance E suivant ED, oblique à un plan dur & immobile GH, que ce corps rencontre en C, l'étant de même que s'il l'étoit par le concours de deux puissances ou forces dirigées suivant les côtes AC, AB du parallélogramme rectangle BC, lesquelles fussent à la puissance E comme ces côtes sont à la diagonale AD de ce parallélogramme. Ce plan GH étant directement opposé à celle de ces deux autres forces, qui seroit suivant AC, & nullement à celle qui seroit suivant AB, recevrait & soutiendrait (Ax. 3.) tout le coup de la première, sans rien recevoir ni soutenir de la seconde. Donc,

1°. Le corps A poussé de la force E suivant ED ou AD, frapperait en C le plan GH d'une force qui seroit à celle-là, comme AC est à AD.

2°. Il couleroit après cela de C vers H suivant CH de la force qui lui resteroit seule & toute entière suivant AB, laquelle seroit à la force E, comme AB, ou CD est à AD.

COROLLAIRE VIII.

Donc pour qu'un corps poussé ou tiré demeure en repos sur un plan, il faut qu'il le soit suivant une perpendiculaire à ce plan en un point où il le touche, ou compris entre ceux où il le rencontre; & réciproquement si ce corps est ainsi poussé ou tiré contre ce plan, il y doit (Ax. 3.) demeurer en repos, n'ayant (Hyp.) que cette

impression ou force perpendiculaire, à laquelle la résistance invincible du plan est alors directement opposée.

C O R O L L A I R E IX.

Tout cela, c'est-à-dire, tout ce qu'on voit du plan GH dans les Corol. 7. 8. se doit aussi entendre d'une surface quelconque immobile MCN, touchée en C par ce plan perpendiculaire (*Hyp.*) à la direction AC de ce que le corps A a de force en ce sens, c'est-à-dire, d'une surface courbe perpendiculaire en C à cette direction; puisque c'est par la résistance directement opposée de ce point ou élément commun à cette surface courbe quelconque MCN, & à son plan touchant GH, que ce plan soutient (*Ax. 3.*) toute la force du corps A suivant AC, sans s'opposer en aucune manière à sa force suivant AB, ou CH. D'où l'on voit que ce corps A poussé suivant ED, ou AD par la force E, rencontrant ainsi perpendiculairement en C la surface courbe & immobile MCN, devroit continuer son mouvement suivant la tangente GH de cette même courbe, & demeurer & sur l'une & sur l'autre en repos en C, s'il n'étoit poussé ou tiré contr'elles que suivant leur commune perpendiculaire AC, à l'extrémité C de laquelle il le touchât.

C O R O L L A I R E X.

FIG. 9.

PLANC. 2.

FIG. 10.

Soit présentement le corps EFGH poussé ou tiré à la fois par tant de puissances E, F, G, H, &c. qu'on voudra, suivant des directions quelconques EC, FB, GM, HN, &c. rencontrées chacune par quelque une d'entr'elles, ou par quelque une de celles des forces résultantes du concours de deux ou de plusieurs puissances proposées. Soit le parallélogramme BC, dont les côtes AC, AB, pris sur les directions concourantes en A des puissances E, F, soient entr'eux comme ces mêmes puissances, & dont la diagonale DA prolongée rencontre en K la direction GM de la puissance G. Soit prise sur elle KR=AD, & KM. $AC :: G.E$. De ces deux côtes KR, KM, soit fait le pa-

rallelogramme RM dont la diagonale KL rencontre en S la direction NH de la puissance H. Soit aussi prise $SQ = KL$, & SN. AC :: H. F. De ces deux côtez SQ, SN, soit pareillement fait le parallelogramme NQ de la diagonale SP, duquel on se servira comme l'on vient de faire des autres AD, KL, s'il y a davantage de puissances ; & toujours de même en quelque nombre qu'elles soient.

Cela fait, il suit des nomb. 1. 2. du Corol. 1. que le corps EFGH, ainsi poussé ou tiré par toutes ces puissances à la fois, le sera toujours par leur concours suivant la diagonale du dernier des parallelogrammes faits comme ci-dessus, & d'une force qui sera à chacune de ces puissances E, F, G, H, &c. comme cette dernière diagonale (qui est ici SP) à chacune de leurs proportionnelles AC, AB, KM, SN, &c.

Car selon les nomb. 1. 2. du Corol. 1. l'impression résultante du concours des puissances E, F, au corps EFGH, est suivant AD, ou KR, & d'une force qui est à la puissance E :: AD. AC (à cause de $KR = AD$) :: KR. AC. Mais (*Hyp.*) E. G :: AC. KM. Donc (en raison ordonnée) la force résultante du concours des deux puissances E, F, au corps EFGH suivant KR, est à la force ou puissance G :: KR. KM. Donc aussi (*Corol. 1. nomb. 1. 2.*) l'impression résultante à ce corps du concours de ces deux dernières forces, c'est-à-dire, du concours des trois E, F, G, est suivant KL ou SQ, & d'une force qui est à la puissance G :: KL. KM (à cause de $SQ = KL$) :: SQ. KM. Mais (*Hyp.*) G. E :: KM. AC. Et E. H :: AC. SN. Donc le corps EFGH est poussé ou tiré suivant SQ par le concours des trois puissances E, F, G, d'une force qui est à la puissance H :: SQ. SN. Donc aussi (*Corol. 1. nomb. 1. 2.*) ce corps est poussé ou tiré suivant SP par le concours de ces deux forces-ci, c'est-à-dire, par le concours des quatre E, F, G, H, d'une force qui est à la puissance H :: SP. SH. Et conséquemment qui est à chacune des quatre E, F, G, H, du concours desquel-

les on la voit résulter, comme SP est à chacune de leurs proportionnelles AC, AB, KM, SN; & ainsi de tant d'autres qu'on voudra, ainsi qu'on le vient d'avancer.

COROLLAIRE XI.

Suivant cela le corps EFGH ici poussé ou tiré suivant SP par le concours des puissances E, F, G, H, dirigées suivant AC, AB, KM, SN, & en même raison entr'elles que ces côtes des parallelogrammes BC, MR, NQ, l'est de même (Ax. 2.) qu'il le feroit par une seule puissance dirigée de S vers P suivant cette dernière diagonale SP, & qui fût à chacune des précédentes E, F, G, H, comme SP est à chacune de leurs proportionnelles AC, AB, KM, SN; puisque (Corol. 10.) cette nouvelle puissance suivant SP, feroit égale à la résultante en ce sens du concours d'action de toutes celles-là.

COROLLAIRE XII.

Donc si l'on place en quelque point X de rencontre du corps EFGH par la dernière diagonale SP, un appui ou une puissance directement contraire suivant XS à la force résultante du concours des précédentes E, F, G, H, suivant cette dernière diagonale SP, & d'une puissance ou force égale à cette résultante; cet appui ou cette puissance X (Corol. 1. du princ. gener.) retiendra le tout en équilibre ou en repos: & réciproquement, si cet appui ou cette puissance contraire retient ainsi le tout en repos, il faut (Ax. 4.) que lui ou elle soit d'une résistance ou force égale à la résultante du concours des puissances E, F, G, H, & suivant la ligne de direction PS de cette force résultante à contre-sens.

COROLLAIRE XIII.

FIG. 4. 5.
6. 7.
Lorsque toutes les forces concourantes E, F, G, H, se réduisent à deux E, F, comme dans les Fig. 4. 5. 6. 7. du présent Lem. 3. alors AD étant la première & la dernière des diagonales trouvées dans le Corol. 10. ce qu'on

vient de voir de SP dans les Fig. 9. 10. se doit dire aussi de AD dans les Fig. 4. 5. 6. 7. Par conséquent (*Corol. 12.*) si l'on place en quelque point X de ceux où la diagonale AD rencontre le corps EFGH, un appui ou une puissance directement contraire suivant AD à la force résultante du concours des deux E, F, suivant la même AD, & d'une résistance ou force égale à cette résultante à contre-sens ; cet appui ou cette puissance X retiendra le tout en équilibre conformément au nomb. 4. du *Corol. 1.* Et réciproquement si le tout est ainsi retenu en équilibre par cet appui ou par une puissance, cet appui doit être d'une résistance, ou cette puissance d'une force égale à la résultante du concours des puissances E, F, & suivant la direction DA de cette force résultante à contre-sens. D'où l'on voit que cet appui ou la puissance substituée en sa place contre la force résultante du concours des puissances E, F, doit être alors dans leur plan, c'est-à-dire, avoir sa résistance dans le plan des directions des puissances E, F, & une direction qui passe à travers l'angle BAC de celles-là.

C O R O L L A I R E XIV.

Donc aussi trois puissances E, X, F, appliquées comme l'on voudra à un même corps DE ne peuvent demeurer en équilibre entr'elles, & le tenir ainsi en repos, à moins que leurs trois directions ne passent le long d'un même plan, par un même point, chacune à travers l'angle compris entre les deux autres ; ce qu'on verra dans la suite s'étendre jusqu'au parallélisme de ces trois directions entr'elles : puisque celle X de ces trois puissances qui résistera seule aux deux autres, doit (*Corol. 12.*) avoir pour cet équilibre une direction qui soit la même à contre-sens que celle AD de la force résultante du concours des deux autres E, F, & conséquemment une direction XA qui (comme AD) passe par le concours A des directions AC, AB, de ces deux autres puissances E,

F, dans le plan de ces deux directions-ci, & à travers leur angle BAC.

COROLLAIRE XV.

FIG. 11. 12. D'où l'on voit que si un poids BCGH, dont DX soit la direction de la pesanteur qu'on lui suppose presentement, est soutenu par deux puissances E, F, avec des cordes EC, FB; la direction DX prolongée de ce poids ainsi en équilibre avec ces deux puissances, passera toujours par le concours A de leurs directions prolongées EC, FB, dans leur plan, & à travers leur angle BAC; puisque sans cela ces deux puissances E, F, & la pesanteur de ce corps, qui en est une troisième, ne seroient point (*Corol. 14.*) en équilibre entr'elles; ce qui est contre l'hypothese.

Ce sera la même chose (*Ax. 2.*) si au lieu des deux puissances E, F, on suppose deux clous en leur place, auxquels leurs deux cordes soient accrochées.

COROLLAIRE XVI.

FIG. 11. Donc aussi le poids BCGH de la Fig. 12. suspendu à un seul clou A par le moyen de deux cordes CA, BA, qui y seroient accrochées, n'y peut être en équilibre ou en repos que lorsque sa direction DX passera par ce point de concours A, puisque (*Ax. 2.*) ce clou ou crochet A résisteroit ici suivant AC, AB, au poids BCGH, comme feroient les deux puissances E, F, en équilibre avec lui, si toutes deux en ce point A, elles lui étoient appliquées suivant les mêmes directions EC, FB.

COROLLAIRE XVII.

FIG. 11. De même dans la Fig. 11. les puissances E, F, résistant au poids BCGH par le moyen des cordes EC, FB, comme feroient (*Ax. 2.*) deux pieux AG, AH, suivant les mêmes directions; ce poids BCGH ne peut demeurer non plus (*Corol. 15.*) en équilibre ou en repos sur ces deux pieux appuyez en A, que lorsque la direction DX passera par

par ce point de concours A, sur lequel on suppose ces deux pieux mobiles sans pouvoir glisser.

COROLLAIRE XVIII.

Il en seroit de même non seulement dans la Fig. 11. Fig. 11. si ces deux pieux, au lieu d'être appuyez en A, l'étoient en M, N, sur un plan ou surface fixe quelconque PQ, sur laquelle ils ne pussent que se mouvoir autour de ces deux points M, N, sans glisser; mais encore dans la Fig. 12. si MG, NH, y étoient deux pieux ainsi appuyez en M, N, sur la surface fixe PQ, & que leurs directions concourussent en A: on prouvera, dis-je, de même encore que le poids BCGH, ne peut point du tout être en repos sur ces deux pieux des Fig. 11. 12. soit que les directions de ces pieux concourent haut ou bas, à moins que celle DX de ce poids ne passe par leur point de concours A.

COROLLAIRE XIX.

Si l'on imagine présentement en équilibre entr'elles Fig. 13. quatre puissances E, H, G, F, appliquées à autant de cordons CE, CH, BG, BF, attachez deux à deux aux extrêmités C, B, d'une autre corde, ou verge CB, & qui prolongées concourent aussi deux à deux en deux autres points quelconques AD; il suit encore du précédent Corol. 14. que l'effort résultant du concours d'action des deux puissances H, G, de directions concourantes en D, & le résultant du concours d'action des deux puissances E, F, de directions concourantes en A, auront DA pour direction commune en sens contraires; puisque l'effort résultant du concours d'action en D des deux puissances H, G, en équilibre (*Hyp.*) avec les deux autres E, F, fait la fonction d'une nouvelle puissance qui égale à lui, & appliquée en D suivant sa direction, feroit seule équilibre avec ces deux-ci E, F, & que réciproquement l'effort résultant du concours d'action en A de ces deux dernières puissances E, F, fait la fonction

F

d'une nouvelle puissance, qui égale à lui, & appliquée en A suivant sa direction, feroit seule équilibre avec les deux autres puissances H, G.

Ce raisonnement conviendra également à tout ce qu'on voudra exprimer d'autres cas de ce Corol. 19. par rapport à ce que les points A, D, peuvent avoir de positions différentes de celles qu'on leur voit dans la présente Fig. 13. qui seule suffit ici, les autres étant aisées à imaginer sur elle.

COROLLAIRE XX.

Deux clous ou crochets en E, F, à la place des deux puissances de ces noms résistant (*Ax. 2.*) comme elles aux deux autres puissances H, G, il suit du précédent Corol. 19. que la direction de l'effort résultant du concours d'action de ces deux dernières puissances H, G, passeroit toujours du concours D de leurs directions par le concours A des directions des cordons accrochez aux crochets supposez en E, F.

SCHOLIE.

I. N'y ayant dans une question que ce qu'on y suppose, il est visible que ne supposant dans le présent Lem. 3. aucune résistance différente de ce que les puissances supposées s'en peuvent faire l'une à l'autre comme dans la Part. 3. de ce Lemme, ce seroit sortir de la question, que de vouloir en considérer ici d'autre que celle-là. Il ne faut cependant pas dire pour cela que les mouvemens précédens n'étant tels qu'on les vient de démontrer, que dans le vuide, le rapport des forces qu'on en a conclu, ne seroit d'aucun usage dans un milieu résistant; puisque l'équilibre qu'on en verra résulter dans la suite conformément au Corol. 1. du principe general, se feroit dans le plein comme dans le vuide, le plein ne résistant qu'au mouvement, & non au repos: de sorte que si deux ou plusieurs forces appliquées à un même corps, se soutenoient mutuellement en équilibre sur ce corps en repos dans un espace vuide, elles s'y soutiendroient appli-

quées de même dans un espace plein. D'où l'on voit non seulement que le rapport des forces, qui causeroit l'équilibre dans le vuide, le causeroit aussi dans le plein où elles auroient de semblables applications ; mais encore que la cessation de ce rapport, ou de la ressemblance des applications de ces forces, qui causeroit la rupture de l'équilibre dans le vuide, la causeroit aussi dans le plein avec cette seule différence que le mouvement qui en résulteroit, se feroit plus lentement dans le plein que dans le vuide, à moins que cette différence de forces ne fût au dessous de la moindre résistance possible du plein. Donc en fait d'équilibre, il seroit inutile de demander s'il se fait dans le plein ou dans le vuide, pour avoir (du moins à une petite différence près) le rapport des forces qui le causent, & reciproquement. C'est pour cela qu'à l'exemple de tout ce qu'il y a eu d'Auteurs qui ont traité cette matiere, nous ne parlerons plus de cette différence des milieux.

II. Quant aux frottemens des corps les uns contre les autres, l'accrochement (pour ainsi dire) que l'asperité de leurs surfaces peut causer entr'eux par l'engrenement des parties de ces surfaces les unes dans les autres, faisant (comme le peu de résistance du plein) la fonction d'une force ou puissance qui retiendroit ainsi les corps les uns contre les autres, & toujours en faveur des plus foibles contre les plus fortes qui leur seroient appliquées, pourroit fort bien aider à les retenir en équilibre, sans que ces autres puissances fussent entr'elles dans le rapport qu'il faudroit dans le vuide pour cela si ces frottemens n'étoient d'aucune résistance, quoique ni eux, ni la résistance du plein ne puissent l'empêcher quand ce rapport s'y trouvera. C'est ce qui nous fera négliger dans la suite ces frottemens avec la résistance du plein, comme s'ils n'en faisoient aucune ; sauf à y compter suivant l'Ax. 2. & la Demand. 1. tout ce qu'ils en ont, en le prenant pour une puissance d'une force ou résistance qui lui soit égale, quand on l'aura connu.

Les Géometres à qui les trois Lemmes précédens avec leurs Corollaires, se présentent tout d'un coup, seront sans doute surpris de la maniere scrupuleuse dont je viens de les démontrer, & du grand détail que j'en viens de faire : aussi aurois-je supposé tout cela comme connu, si je n'avois eu affaire qu'à eux ; mais j'écris pour des Commençans, à qui il faut tout expliquer, & ce d'autant plus ici, que c'est sur ces trois Lemmes, & sur le principe general qu'est fondé tout ce qu'on va voir des proprieté des Machines.

LEMME I V.

Plusieurs puissances étant appliquées à autant de cordons attachez ensemble par un seul & même nœud commun que rien autre chose ne retienne ; l'équilibre est impossible entre ces puissances (quelles qu'elles soient, & quel qu'en soit le nombre) lorsqu'elles sont dirigées de maniere qu'un plan puisse passer par le nœud commun de leurs cordons sans passer entre elles, & sans qu'elles soient toutes dans ce plan.

DEMONSTRATION.

Il est manifeste qu'un plan qui rencontreroit ainsi tous les cordons des puissances supposées, auroit toutes ces puissances tirantes d'un seul côté par rapport à lui, ou quelques-unes tirantes vers ce côté-là pendant que toutes les autres tireroient suivant sa direction. Donc (Corol. 6. du Lem. 2. & Corol. 10. du Lem. 3.) de quelque maniere qu'on combine toutes ces puissances, il ne résultera du concours de toutes qu'une impression totale vers le côté qu'il y aura des puissances hors le plan supposé. Donc (princ. gener.) il ne pourra y avoir alors d'équilibre entre toutes ces puissances. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc quelques soient les directions de plus de deux cordons (en quelque nombre qu'ils soient) attachez tous ensemble par un seul & même nœud, & quelques puis-

fancées qu'on leur applique , une à chacun ; l'équilibre entr'elles sera impossible.

1°. Dans le cas de tous leurs cordons en même plan , si la direction de quelqu'un d'eux ne divise pas quelqu'un des angles que les autres cordons font entr'eux ; puisqu'un autre plan que le leur , mené suivant ce cordon-là , les rencontreroit alors tous en leur nœud commun , sans passer à travers d'eux.

2°. Dans le cas des mêmes cordons en plans différens , si quelqu'un de ces plans prolongé ne passe non plus à travers des cordons des autres plans , puisque celui-là sera lui-même , alors un plan qui rencontrera aussi tous ces cordons en leur nœud commun , sans passer à travers d'eux.

C O R O L L A I R E II. ¶

Il suit encore de ce Lemme-ci , quelques soient les directions de plus de deux cordons (en quelque nombre qu'ils soient encore) attachez tous ensemble par un seul & même nœud , qui soit regardé comme le centre d'un cercle au d'une sphere ; que si ces cordons ne sont pas répandus en plus d'un demi-cercle , lorsqu'ils sont tous en même plan , ou en plus d'une demi-sphere , lorsqu'ils sont en plans différens ; quelque puissance qu'on leur applique , une à chacun , elles ne pourront jamais être en équilibre entr'elles suivant ces directions : puisqu'on pourra toujours alors faire passer un plan par le nœud commun de ces cordons , sans le faire passer entr'eux , & sans qu'ils soient tous dans ce plan.

Il est visible que chacun de ces Corollaires suit aussi de l'autre , & qu'ils se prouvent mutuellement tous deux.

L E M M E V.

I. Lorsque tous les cordons issus d'un même nœud , sont dirigés suivant un même plan , & répandus en plus d'un demi-cercle , il n'y en a aucun qui prolongé par delà ce nœud commun , ne passe entre les autres cordons.

Car s'il n'y passoit pas, il seroit le diamètre terminant d'un demi-cercle dans lequel seul lui & les autres cordons seroient alors tous répandus ; ce qui est contre l'hypothese. Donc, &c.

II. *Dans la même hypothese de tous les cordons dirigez suivant un même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle, quelque ligne droite qu'on mene ou qu'on imagine sur ce plan par le nœud commun de tous ces cordons, sans passer le long d'aucun d'eux, elle passera toujours de part & d'autre de ce nœud, à travers deux des angles que ces cordons feront entr'eux.*

Car si elle ne passoit à travers aucun de ces angles, elle seroit le diamètre terminant d'un demi-cercle dans lequel seul tous ces cordons seroient alors répandus ; ce qui est contre l'hypothese. Et si cette ligne droite ne passoit à travers que d'un des angles de ces cordons, les deux cordons voisins à droite & à gauche de cette ligne droite du côté où elle ne passeroit à travers aucun de leurs angles seroient en ligne droite terminante aussi un demi-cercle, dans lequel seul tous ces cordons seroient alors répandus ; ce qui est contre l'hypothese. Donc toute ligne droite mene sur le plan & par le nœud commun de tous ces cordons, passera toujours à travers deux de leurs angles de part & d'autre de ce nœud. *Ce qu'il falloit démontrer*

III. *Lorsque ces cordons sont dirigez suivant des plans differens, & répandus en plus d'une demie-sphere ; il n'y a aucun de ces plans qui prolongé par de-là le nœud commun de ces cordons, ne passe entre les cordons des autres plans.*

Car s'il n'y passoit pas, il seroit le plan d'un grand cercle terminant une demie-sphere, dans laquelle seule tous les cordons seroient alors répandus ; ce qui est contre l'hypothese. Donc, &c.

S C H O L I E.

La raison qui vient de faire voir (*Part. 2.*) que toute ligne droite menée par le nœud, & sur le plan commun

de plusieurs cordons qui y seroient tous répandus en plus d'un demi-cercle, sans le faire passer le long d'aucun de ces cordons, passeroit toujours à travers deux de leurs angles de part & d'autre de leur nœud commun : cette raison, dis-je, fera voir de même que tout plan mené par le nœud commun de plusieurs cordons répandus en plus d'une demie-sphere, sans le faire passer le long d'aucun d'eux, passeroit aussi toujours à travers deux de leurs angles de part & d'autre de leur nœud commun.

Les Figures de ces deux derniers Lem. 4. 5. étant faciles à imaginer, on a négligé de les ajouter ici, & ce d'autant qu'il y auroit fallu exprimer des plans à angles differens avec celui de la Planche, plus difficiles à tracer, & à reconnoître sur elle, qu'à se les représenter sur le discours que l'embarras de ces Figures n'auroit fait que rendre plus long & moins clair.

A V E R T I S S E M E N T.

Jusqu'ici nous n'avons employé de Géometrie que quelque chose des six premiers Livres, & de l'onzième des Elemens d'Euclide. Voici presentement quelques Lemmes de pure Géometrie, qui n'en suppose pas davantage : c'est potir rendre plus universelle l'application du précédent principe general aux machines, & pour faire qu'aucun cas n'échappe à la generalité de nos propositions, lesquelles n'exigeant dans le Lecteur que la valeur de ces sept Livres d'Euclide, seront (ce me semble) à la portée des Commençans attentifs : c'est pour eux que j'ajoute les Définitions suivantes, qui ne se trouvent point dans Euclide.

D E F I N I T I O N IX.

Si d'un point quelconque D de la demi-circonference CDF d'un cercle, dont A soit le centre, on laisse tomber une perpendiculaire DE sur le diametre CF en E ; cette perpendiculaire DE est également appelée *Sinus* des angles CAD, DAF, ou des arcs CD, DF, mesures de ces angles. Suivant la même dénomination le rayon BA per-

F I G. 141

pendiculaire aussi sur CF, est pareillement appelé *Sinus* de chacun des angles droits CAB, BAF, ou de chacun des quarts de cercle BC, BF, & comme ce Sinus AB est le plus grand de tous, on l'appelle *Sinus total*, sur lequel se mesurent tous les autres. D'où l'on voit que son égal AD doit aussi être pris pour Sinus total, dont DE soit un des Sinus partiels. De sorte que,

COROLLAIRE I.

Dans le triangle rectangle AED, en prenant AD pour le Sinus total, ou de l'angle droit E, l'on aura DE pour le Sinus de l'angle DAC ou DAF; & par la même raison l'on aura aussi AE pour le Sinus de l'angle ADE.

COROLLAIRE II.

On voit aussi que deux angles DAC, DAF, compléments l'un de l'autre à deux droits, c'est-à-dire, dont la somme vaut deux droits, ont chacun le même Sinus DE, en prenant toujours AD pour le Sinus total.

DEFINITION X.

Si à l'extrémité C du rayon AC, on mène une perpendiculaire, ou tangente CM, laquelle soit rencontrée en G par l'autre côté AD prolongé de l'angle CAD; la partie CG de cette perpendiculaire, est appelée *Tangente* de cet angle CAD, ou de l'arc CD. De même si à l'extrémité F du rayon AF, on mène une perpendiculaire FN, laquelle soit rencontrée en H par l'autre côté DA prolongé de l'angle FAD complément du premier CAD à deux droits; la partie FH de cette seconde perpendiculaire sera aussi appelée *Tangente* de ce complément FAD ou de l'arc FD.

COROLLAIRE.

Les lignes CG, FH, étant égales entr'elles, de même que le sont les autres côtes AC, AF, des triangles ACG, AFH. (*constr.*) semblables on voit que les tangentes des deux

deux angles complemens l'un de l'autre à deux droits, sont toujours égales entr'elles, de même que leurs sinus le font toujours (*Déf. 9. Corol. 2.*) entr'eux ; c'est-à-dire, que deux angles complemens l'un de l'autre à deux droits, ont toujours la même tangente & le même sinus.

Il en est de même de AG, AH, qu'on appelle leurs *Secantes*.

D É F I N I T I O N X I.

Lorsqu'un angle à force de devenir aigu, s'évanouit en parallélisme de ses côtes entr'eux, soit qu'ils soient ou non confondus en un, on l'appelle *infiniment aigu* ; & lorsqu'à force de devenir obtus, ses deux côtes deviennent (comme bout à bout) en ligne droite, on l'appelle *infiniment obtus*.

C O R O L L A I R E.

On voit de-là qu'un angle infiniment aigu en a toujours un infiniment obtus pour complément à deux droits ; & réciproquement.

L E M M E I V.

A l'instant qu'un angle rectiligne s'évanouit à force de diminuer, ses côtes deviennent parallèles entr'eux.

D É M O N S T R A T I O N.

Car le parallélisme de ces deux lignes entr'elles (dont la réduction de ces mêmes lignes en une, est une espèce) naissant de l'évanouissement du dernier, c'est-à-dire, du plus petit des angles qu'elles puissent faire entre-elles, la fin de ce dernier angle doit être le commencement de ce parallélisme, & comme le terme où ils se touchent, pour ainsi dire ; par conséquent à l'instant de cet évanouissement il doit y avoir tout à la fois entre ces deux lignes & angle finissant, & parallélisme naissant. Donc à l'instant que leur angle s'évanouit à force de diminuer, elles deviennent parallèles entr'elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Cet angle finissant ainsi (*Définit. II.*) par l'infiniment aigu, il s'ensuit que deux lignes droites arrivées à ce terme, le sont aussi à leur parallélisme, & conséquemment que lorsqu'elles ne font plus entr'elles qu'un angle infiniment aigu, elles peuvent à la rigueur passer pour parallèles, & réciproquement puisqu'elles n'ont plus de chemin à faire pour passer de cet angle au parallélisme.

COROLLAIRE II.

Si de deux points fixes partent deux lignes droites mobiles chacune autour du sien, lesquelles fassent entr'elles un angle qui devienne aigu de plus en plus par l'éloignement continuél de son sommet; ces deux lignes seront (*Corol. I.*) parallèles entr'elles lorsque ce sommet se trouvera infiniment éloigné de leurs points fixes, l'angle qu'elles feront entr'elles, se trouvant alors infiniment aigu.

COROLLAIRE III.

Si au contraire d'un même point fixe partent deux lignes droites dont l'angle compris entr'elles, devienne enfin infiniment aigu; alors ces deux lignes devenues (*Corol. I.*) parallèles entr'elles, passant (*Hyp.*) par un même point, se confondront en une seule & même ligne droite, & la base de l'angle fini qu'elles faisoient auparavant entr'elles, se trouvera alors anéantie ou réduite en un point, si ces deux lignes étoient égales, ou égale à leur différence pareillement confonduë avec elles, si elles étoient inégales; réciproquement ces deux lignes seront égales ou inégales entr'elles, selon que leur angle infiniment aigu rendra cette base nulle ou non.

COROLLAIRE IV.

Deux lignes droites qui font entr'elles un angle infiniment aigu d'un côté, en faisant toujours un (*Corol. Déf. II.*)

infiniment obtus de l'autre ; il suit que puisqu'elles se disposent parallelement (*Corol. 2.*) ou se confondent en une (*Corol. 3.*) du côté de l'angle infiniment aigu , elles doivent se disposer en sens directement contraires parallelement , ou en ligne droite bout à bout du côté de l'angle infiniment obtus.

L E M M E V I I.

De quelque maniere que la ligne droite AD divise l'angle rectiligne BAC , le sinus de cet angle total BAC se trouvera égal à la somme des sinus des angles partiels BAD , DAC , lorsque ce même angle total sera infiniment aigu. FIG. 15.

D E M O N S T R A T I O N.

Du centre A , & d'un rayon quelconque AE , soit l'arc de cercle EFO , qui rencontre AD , AC , en F , O ; des points E , F , soient EH , FK , perpendiculaires en H , K , sur AC , la premiere EH rencontrant AD en L , & du point E la droite EG perpendiculaire aussi en G sur AD. Cela fait , si l'on prend AE , ou son égale AF pour sinus total , l'on aura (*Def. 9. Corol. 1.*) EH , FK , EG , pour les sinus des angles BAC , DAC , BAD.

Je dis donc que lorsque l'angle total BAC sera devenu infiniment petit , son sinus EH se trouvera égal à la somme des sinus EG , FK , des angles partiels BAD , DAC ; c'est-à-dire , qu'alors on aura $EH = EG + FK$.

Pour le voir , il n'y a qu'à considerer que lorsque l'angle total BAC sera infiniment aigu , les deux partiels BAD , DAC , le seront aussi ; & conséquemment (*Corol. 1. du Lem. 6.*) que les trois droites BA , DA , CA , seront alors paralleles entr'elles de l'une ou de l'autre des deux manieres marquées dans les Corol. 2. 3. du Lem. 6. Donc les angles (*Hyp.*) droits en H , K , G , rendront alors EH , FK , EG , perpendiculaires à chacune de ces trois paralleles ; ce qui confondant EL avec EG , & LH avec FK , donne alors $EG + FK = EL + LH = EH$. Donc le sinus EH de l'angle total BAC se trouve alors égal à la somme

52 NOUVELLE
des sinus EG, FK, des angles partiels BAD, DAC. Ce
qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Donc aussi pour lors le sinus de celui qu'on voudra
de ces deux angles partiels BAD, DAC, sera égal à la
différence dont le sinus de l'autre sera surpassé par le
sinus EH de l'angle total BAC ; c'est-à-dire, qu'alors
 $EG=EH-FK$, & $FK=EH-EG$.

COROLLAIRE II.

Or en prolongeant DA, CA, vers M, N, l'on aura
aussi (Déf. 9. Corol. 2.) EG, EM, FN, pour les sinus des
angles BAM, BAN, MAN ; & lorsque l'angle BAC sera
infiniment aigu, son complément (à deux droits) BAM
sera infiniment obtus, & MAN infiniment aigu. Donc
lorsqu'un angle BAM infiniment obtus sera divisé en
deux, dont un MAN soit infiniment aigu, le sinus de
l'angle total BAM sera toujours égal à la différence
dont le sinus du plus grand BAN des partiels surpassera
le sinus du plus petit MAN ; puisqu'alors (Corol. 1.) l'on
aura toujours $EG=EH-FK$.

Quoique dans le Corol. 2. les angles BAM, BAN, infi-
niment obtus, soient infiniment grands par rapport à l'infini-
ment aigu MAN, l'étant aussi par rapport à leurs comple-
mens infiniment aigus BAD, BAC, qui ont (Déf. 9. Corol.
2.) les mêmes sinus qu'eux ; leurs sinus EG, EH, seront
infiniment petits, & de même genre que celui EK de l'angle
MAN ; & conséquemment $EG=EH-FK$ sera ici d'une
valeur réelle, quoiqu'infiniment petite. C'est pour rendre de
la plus grande universalité possible les propositions & les Co-
rollaires des sections suivantes, que nous en venons ici jus-
qu'aux infiniment petits, dont l'idée seule suffira sans en sça-
voir le calcul : idée à la portée de tout le monde, avec un
peu d'attention. Par infiniment petit, on n'entend qu'une
grandeur moindre que quelque assignable que ce soit, laquelle,
au langage des Anciens, s'appelleroit quantitas minor quavis
data.

S C H O L I E.

Les angles en H, K, G, étant (*Hyp.*) droits, & le Corol. 1. du Lem. 6. faisant voir que lorsque l'angle BAC est infiniment aigu, & conséquemment aussi les angles BAD, DAC; les trois lignes BA, DA, CA, sont parallèles entr'elles de quelqu'une des deux manières marquées dans les Corol. 2. 3. de ce Lem. 6. On vient de conclure, suivant la doctrine d'Euclide, que chacune des lignes EH, FK, EG, est perpendiculaire à chacune de ces trois parallèles; & conséquemment qu'alors LH est égale à FK, aussi-bien que EG à EL, qui pour lors se confond avec elle comme LH avec FK. Pour voir tout cela, il faut considérer que lorsque les droites BA, CA, deviennent parallèles entr'elles, tout ce qu'on en peut imaginer d'autres par A dans l'angle BAC, le deviennent aussi entr'elles (*Lem. 6. Corol. 1.*) & à ces deux-là; & conséquemment que l'arc EFO perpendiculaire à toutes, dégénère pour lors en une ligne droite, qui leur est aussi perpendiculaire, & qui passant par E, F, de même que EH, EG, FK, perpendiculaire aussi pour lors à ces parallèles AC, AD, AB, doit se confondre avec celles-là, desquelles EG se trouve pour lors au bout de FK en ligne droite, avec laquelle EH se confond alors sur cet arc EFO redressé en une ligne $EH = EG = FK$, conformément au présent Lem. 7.

L E M M E V I I I.

De quelque point E de la diagonale AD d'un parallélogramme quelconque ABDC, qu'on mene deux perpendiculaires EF, EG, sur ses côtés AB, AC, prolongez avec cette diagonale où besoin sera; ces perpendiculaires seront toujours entr'elles en raison reciproque de ces côtés, c'est-à-dire, $EF. EG :: AC. AB$.

Fig. 25

17.

D E M O N S T R A T I O N .

Du point D soient DH, DK, perpendiculaires aussi sur les côtez AB, AC, du même parallélogramme ABDC. Le parallélisme de ses deux autres côtez DC, DB, avec ces deux-là, rendra les angles $HBD = HAK = KCD$, outre les angles $EAF = DAH$, & $EAG = DAK$. Donc les angles en H, K, F, G, étant (*Hyp.*) droits, les triangles DBH, DCK, seront semblables entr'eux, de même que les triangles EFA, DHA, & que les triangles EGA, DKA. Par conséquent $DH : DK :: DB : DC :: AC : AB$. Et $EF : DH :: EA : DA :: EG : DK$. Ou (en permutant.) $EF : EG :: DH : DK$. Donc aussi $EF : EG :: AC : AB$. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E I.

Mais si l'on prend AE pour le sinus total, l'on aura (*Déf. 9. Corol. 1.*) EF, EG, pour les sinus des angles EAF, EAG, ou de leurs égaux ou complemens DAB, DAC. Donc les côtez AC, AB, du parallélogramme ABDC sont entr'eux comme les sinus des angles DAB, DAC, c'est-à-dire, en raison reciproque des sinus des angles que ces deux côtez font avec la diagonale AD: de sorte que les angles DAB, ADC, étant égaux entr'eux, de même que les côtez AB, DC, les côtez AC, DC, du triangle ACD, seront toujours entr'eux comme les sinus des angles ADC, DAC, qui leur sont opposez dans ce triangle.

C O R O L L A I R E II.

Par la même raison, si l'on acheve le parallélogramme ADCM, dont AC soit la diagonale, l'on aura AM à AD comme le sinus de l'angle CAD au sinus de l'angle CAM; c'est-à-dire (à cause de $AM = DC$, & l'angle $CAM = ACD$) les côtez DC, AD, du triangle ACD, entr'eux comme les sinus des angles CAD, ACD, qui leur sont opposez dans ce triangle. Donc ayant déjà (*Corol. 1.*)

les côtez AC, AD, de ce même triangle ACD entr'eux comme les sinus des angles ADC, DAC ; l'on aura les trois côtez AC, DC, AD, de ce triangle quelconque ACD entr'eux comme les sinus des angles ADC, DAC, DCA, qui leur sont opposez ; & ainsi de tous les autres triangles rectilignes à l'infini, celui-ci ACD moitié d'un parallelogramme (*Hyp.*) quelconque ABDC, étant aussi quelconque.

COROLLAIRE III.

Mais le parallelogramme ABDC donne $DC=AB$, l'angle $ADC=DAB$, & le sinus de l'angle DCA, égal (*Déf. 9. Corol. 2.*) à celui de son complement BAC à deux droits. Donc (*Corol. 2.*) AC, AB, AD, sont entr'eux comme les sinus des angles, DAB, DAC, BAC.

COROLLAIRE IV.

Or le parallelogramme ABDC rend aussi les angles $DAB=ADC$, $DAC=ADB$, $BAC=BDC$, & leurs côtez $AC=BD$, $AB=CD$. Donc (*Corol. 3.*) l'on aura de même toujours BD, CD, AD, entr'eux comme le sinus des angles ADC, ADB, BDC.

COROLLAIRE V.

Donc les sinus des angles ADC, ADB, étant (*Déf. 9. Corol. 2.*) les mêmes que ceux de leurs complemens CDO, BDO, l'on aura aussi toujours (*Corol. 4.*) BD, CD, AD, en raison des sinus des angles CDO, BDO, BDC, au travers desquels ces lignes prolongées passeroient.

COROLLAIRE VI.

Il suit encore du Corol. 4. qu'un angle rectiligne quelconque BDC étant divisé à volonté par une droite DA, plus cet angle total BDC sera petit, plus sera grande la raison de son sinus à chaque sinus des angles partiels ADB, ADC, & plus au contraire ce même angle total BDC sera grand, plus cette raison sera petite : car si sur

la diagonale AD prise de grandeur arbitraire, l'on imagine un parallélogramme ABDC, dont les côtez DB, DC, soient sur ceux de l'angle supposé BDC; on verra que plus cet angle diminuera, plus cette diagonale AD augmentera, les côtez DB, DC, du parallélogramme ABDC demeurant toujours les mêmes, & plus au contraire cet angle BDC augmentera, plus cette diagonale AD diminuera. Donc dans tous ces changemens du parallélogramme ABDC, cette diagonale AD se trouvant toujours (*Corol. 4.*) à ses côtez BD, DC, comme le sinus de l'angle total BDC sera aux sinus des angles partiels ADC, ADB.

1°. Plus cet angle total BDC diminuera, plus au contraire le rapport de son sinus à chacun des sinus de deux angles partiels ADC, ADB, augmentera jusqu'à se trouver le plus grand qu'il puisse être, lorsque cet angle BDC sera infiniment aigu.

2°. Reciproquement plus ce même angle total BDC augmentera, plus au contraire le rapport de son sinus à chacun des sinus des deux angles partiels ADC, ADB, diminuera, jusqu'à se trouver le plus petit qu'il puisse être lorsque cet angle BDC sera infiniment obtus.

C O R O L L A I R E. VII.

Il suit de plus du *Corol. 4.* qu'en quelque rapport fini qu'un angle rectiligne fini quelconque BDC, soit divisé par la droite AD, chacun des sinus de cet angle total, & des deux partiels ADC, ADB, sera toujours moindre que la somme des deux autres sinus. Car si sur AD de longueur prise à volonté, & de côtez pris sur DC, DB, on fait (comme dans le précédent *Corol. 6.*) le parallélogramme ABDC; le *Corol. 4.* fait voir que les sinus de ces trois angles BDC, ADC, ADB, sont entr'eux comme AD, BD, CD, ou (à cause de $AC=BD$) comme les trois côtez AD, AC, CD, du triangle ACD. Or on sçait que chacun de ces trois côtez est moindre que la somme des deux autres. Donc aussi chacun des sinus des

trois

trois angles finis BDC, ADC, ADB, est moindre que la somme des deux autres sinus.

COROLLAIRE VIII.

Trois lignes droites DE, DC, DA, étant menées d'un même point D sur un même plan, faisant entr'elles des angles quelconques, si par tels points H, L, K, qu'on voudra de ces trois lignes prolongées, ou non, on leur fait autant de perpendiculaires EF, FG, EG; il suit encore du Corol. 2. que ces côtez EF, FG, EG, du triangle EFG, qui en résultera, seront toujours entr'eux comme les sinus des angles ADC, ADB, BDC, à travers desquels, ou des complemens desquels, leurs perpendiculaires DB, DC, DA, prolongées passeroient.

FIG. 18.
19. 20.

Car si l'on imagine PQ parallèle à BD, avec laquelle, & avec AD prolongée (s'il est nécessaire) elle fasse le triangle PQD, & que l'on prolonge BD, CD, jusqu'à la rencontre de EG (prolongée) en MN: les triangles EHM, DKM, rectangles (*Hyp.*) en H, K, ayant de plus les angles EMH=DMK, ont aussi leurs troisièmes angles MEH=MDK: de même les triangles GLN, DKN, rectangles (*Hyp.*) en L, K, ayant aussi de plus les angles GNL=DNK, ont pareillement leurs troisièmes angles NGL=NDK. Mais les angles MEH=GEF, MDK=BDP=DPQ, à cause de PQ supposée parallèle à BD; & les angles NGL=EGF, NDK=PDQ. Donc les angles GEF=DPQ, EGF=PDQ, dans les triangles EFG, PQD, lesquels en conséquence ont leurs troisièmes angles en F, Q, pareillement égaux entr'eux: ce qui rend ces deux triangles semblables entr'eux; & par conséquent les trois côtez EF, FG, EG, du premier EFG, proportionnels aux trois côtez PQ, QD, PD, du second PQD de ces deux triangles; c'est-à-dire, EF. FG. EG :: PQ. QD. PD.

Or ces trois derniers côtez PQ, QD, PD, du triangle PQD, sont entr'eux (*Corol.*) comme les sinus des angles PDQ, DPQ, DQP, ou (*Déf. 9. Corol. 2.*) ou de leurs

H

complemens ADC, ADB, BDC. Donc aussi les côtez EF, FG, EG, du triangle EFG, sont entr'eux comme les sinus des angles ADC, ADB, BDC, à travers desquels, ou des complemens desquels leurs perpendiculaires (*Hyp.*) DB, DC, DA, prolongées passeroient, ainsi qu'on le voit avancé au commencement de ce Corollaire-ci.

C O R O L L A I R E IX.

Il suit aussi du présent Lem. 8. que de quelque point E d'un des côtez AD d'un parallelogramme quelconque ADCM, qu'on mene des perpendiculaires EG, EF, sur la diagonale AC, & sur son autre côté AM; cet autre côté AM, & cette diagonale AC seront toujours entre-eux en raison reciproque de ces deux perpendiculaires EG, EF, sçavoir, $EF.EG :: AC.AM$. Puisque ce Lem. 8. donne toujours $EF.EG :: DH.DK :: DB.DC :: AC.AM$.

Cela peut aussi se démontrer immédiatement de cela seul que $EF.EG :: DH.DK :: DB.DC :: AC.AM$.

On pourra tirer de ceci des consequences semblables à celles qu'on vient de tirer du présent Lem. 8. cela est presentement trop facile pour s'y arrêter.

C O R O L L A I R E X.

Il suit enfin de ce dernier Corol. 9. & du présent Lem. 8. que de quelque point, soit de la diagonale, ou d'un des côtez d'un parallelogramme quelconque, qu'on mene des perpendiculaires sur les deux autres de ces trois lignes prolongées, ou non; ces deux perpendiculaires seront toujours entr'elles en raison reciproque des deux côtez, ou d'un d'eux, & de la diagonale du parallelogramme proposé quelconque, sur lesquelles elles sont à angles droits.

L E M M E IX.

I. *Lorsqu'un angle d'un parallelogramme quelconque devient infiniment aigu, la diagonale qui passe par cet angle, devient égale à la somme de ses côtez.*

11. Au contraire lorsque cet angle devient infiniment obtus, cette diagonale ne se trouve plus égale qu'à la différence de ces mêmes côtez.

DEMONSTRATION.

PART. I. Suivant le Corol. 3. du Lem. 8. la diagonale AD d'un parallélogramme quelconque ABDC est toujours aux côtez AB, AC, de ce parallélogramme comme le sinus de l'angle total BAC est aux sinus des angles partiels DAC, DAB. Mais lorsque cet angle total BAC devient infiniment aigu, son sinus (Lem. 7.) devient égal à la somme des sinus des angles partiels DAC, DAB. Donc aussi pour lors la diagonale AD devient égale à la somme des côtez AB, AC. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

FIG. 21

PART. II. Imaginons le parallélogramme ABDC fait de quatre règles AB, BD, AC, CD, mobiles autour de quatre clous qui les retiennent ensemble en A, B, D, C, & qu'on l'écrase en pressant les deux points ou clous B, C, l'un vers l'autre jusqu'à sa diagonale AD, qui s'allongera ainsi à mesure que l'autre BC s'accourcira, les côtez du parallélogramme ainsi varié demeurant toujours les mêmes. On verra qu'à mesure que ses angles ABD, ACD, deviendront ainsi plus obtus, les côtez DB, DC, avanceront vers AD en décrivant du centre D les arcs circulaires BQ, CP, jusqu'à ce que les sommets B, C, de ces deux angles soient arrivés en Q, P, & ces côtez DB, DC, en DQ, DP, sur cette diagonale AD, dont l'allongement joint au raccourcissement de l'autre BC, permettra aussi aux deux autres côtez AD, AC, d'arriver pour lors sur elle en AQ, AP; auquel instant des angles ABD, ACD, ainsi devenus infiniment obtus, la diagonale BC fera en PQ. Donc alors $BC = PQ = DP - DQ = DC - DB = AB - AC$. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

Hij

COROLLAIRE I.

Si l'on suppose presentement qu'un corps ou point A soit poussé ou tiré par deux puissances à la fois, dirigées suivant les côtez AB, AC, du parallelogramme ABDC, lesquels leur soient proportionnels; les art. 1. 2. du Corol. 1. du Lem. 3. faisant voir que ce corps ou point A devroit alors tendre de A vers D suivant la diagonale AD de ce parallelogramme, & d'une force qui seroit à chacune de ces puissances comme cette diagonale à chacun des côtez AB, AC, qui leur sont (*Hyp.*) proportionnels. La démonstration de la Part. 1. de ce Lemme-ci fait consequemment voir que si l'angle BAC étoit infiniment aigu, la force du corps ou point A suivant AD, résultante du concours des puissances dirigées suivant AB, AC, seroit alors égale à la somme de ces deux puissances, & dirigée (*Lem. 6. Corol. 1.*) parallelement à leurs directions alors paralleles entr'elles, & en même sens que ces puissances qui tendroient alors toutes deux de A vers D, & conspiroient ainsi toutes entieres à mouvoir en ce sens ce corps ou point A de la somme entiere de leurs forces.

COROLLAIRE II.

Si B étoit le point ou le corps poussé ou tiré à la fois par les deux puissances précédentes dirigées presentement suivant les côtez BA, BD, du parallelogramme ABDC, qui leur sont (*Hyp.*) proportionnels; les art. 1. 2. du Corol. 1. du Lem. 3. faisant encore voir que ce corps ou point B tendroit alors de B vers C, suivant l'autre diagonale BC de ce parallelogramme, & d'une force qui seroit à chacune de ces puissances comme cette diagonale BC à chacun des côtez BA, BD, de ce même parallelogramme ABDC; la démonstration de la Part. 2. de ce Lemme-ci fait consequemment voir aussi (au contraire de la démonstration de la Part. 1.) que si l'angle ABD étoit infiniment obtus, la force du corps ou point B suivant BC, résultante du concours de ces deux puissances,

ou plutôt restante de la directe contrariété qui (*Lem. 6. Corol. 4.*) seroit alors entr'elles, ne seroit plus alors qu'é-gale à la différence de ces deux puissances, & dirigée (*Lem. 6. Corol. 4.*) parallèlement à leurs directions alors parallèles entr'elles ou directement opposées, & en même sens que la plus forte d'entr'elles, à qui seule leur directe contrariété ne laisseroit que son excès sur l'autre pour agir sur ce corps ou point B.

Ces deux Corol. 1. 2. s'accordent parfaitement avec les loix ordinaires du choc des corps, suivant lesquelles deux donnant à la fois sur un en même sens, le pousseroient en ce sens de la somme de toutes les forces qu'ils lui communiqueroient séparément, conformément au Corol. 1. Et deux donnant à la fois sur un en sens directement contraires, ne le pousseroient que de la différence de ces deux forces dans le sens de la plus grande, conformément au Corol. 2.

C O R O L L A I R E III.

Si l'on imagine, comme dans la démonstrat. de la Part. 2. les côtez BA, BD, du triangle ABD, mobiles autour des points fixes A, D, de la base AD, laquelle s'allonge à mesure qu'en écrasant ce triangle vers elle, on en approche l'angle B; cette démonstration de la Part. 2. fait voir que lorsque ce sommet B sera sur cette base allongée AD, elle sera égale à la somme des deux autres côtez BA, BD, de ce triangle ABD, & chacun de ces côtez égal à la différence dont l'autre est alors surpassé par cette base: & comme (*Déf. 11.*) l'angle ABD du triangle de ce nom; se trouve alors infiniment obtus, & chacun des deux autres BAD, BDA, infiniment aigu; il s'ensuit que dans un triangle réduit à un angle infiniment obtus, & à deux infiniment aigus,

1°. Que le côté opposé à l'angle infiniment obtus, vaut la somme des deux autres côtez.

2°. Que le côté opposé à un angle infiniment aigu, vaut la différence des deux autres côtez.

SCHOLIE.

I. Dans la démonstrat. de la Part. 2. on vient de voir que lorsque deux angles oppoſez ABD, ACD, du parallélogramme ABDC deviennent infiniment obtus par l'arrivée de leurs ſommets B, C, ſur la diagonale AD; cette diagonale AD, ſur laquelle les deux côtéz AB, BD, ſe couchent alors en Q, de même que les deux autres AC, CD, en P, ſe trouve alors égale à la ſomme de ces côtéz pris ainſi deux à deux, c'eſt-à-dire, qu'alors $AD = AB + BD = AC + CD$. Or lorsque l'angle ABD ſe trouve infiniment obtus, ſon complément BAC eſt (*Corol. 11.*) infiniment aigu. Donc lorsqu'un angle BAC d'un parallélogramme quelconque ABDC devient infiniment aigu par l'arrivée de ſes côtéz AB, AC, ſur la diagonale AD, cette diagonale ſe trouve toujours alors égale à la ſomme de ces deux mêmes côtéz. Ce qui eſt encore une nouvelle preuve très-ſenſible de la Part. 1. de ce Lemme-ci, pour le cas où les ſommets B, C, des angles ABD, ACD, ſont mobiles.

II. Pour avoir auſſi de cette Part. 1. une démonſtration ſenſible autant que l'incompréhenſibilité de l'infini le peut être, lorsque l'angle BAC devient infiniment aigu, les deux points B, C, demeurant fixes; imaginons le parallélogramme ABDC fait des parties BA, BD, CA, CD, de quatre règles indéfinies BE, BG, CF, CH, mobiles autour de ces points fixes B, C, & qui dans leur mouvement autour de ces deux points, ſe coupent toujours en deux quelconques A, D, de la droite infinie MN, fixe à égales diſtances des points auſſi fixes B, C. On verra qu'à meſure que ces points de concours A, D, s'éloigneront l'un de l'autre le long de cette droite MN, les angles oppoſez BAC, BDC, deviendront aigus de plus en plus, & les oppoſez ABD, ACD, obtus de plus en plus; & que lorsque ces deux points de concours A, D, ſeront infiniment éloignés l'un de l'autre, & des points fixes B, C, les angles BAC, BDC, ſeront infini-

ment aigus, & les deux autres (*Corol. de la Déf. 11.*) ABD, ADC, infiniment obtus. Or si du centre D, & des rayons DB, DC, on a conçu deux arcs circulaires BQ, CP, variables comme leurs rayons par l'éloignement continuél de leur centre D, on verra qu'à mesure que ce centre D s'éloigne, comme le point A, des points fixes B, C, ces deux arcs deviennent moins courbes de plus en plus, jusqu'à devenir lignes droites perpendiculaires à MN, & aux deux règles de chacun des points B, C, bout à bout en lignes droites parallèles à MN, lorsque les points A, D, sont infiniment éloignez l'un de l'autre, & des points fixes B, C, & que les lignes PA, PD, CA, CD, QA, QD, BA, BD, ainsi changées en infinies PM, PN, CF, CH, QM, QN, BE, BG, parallèles entr'elles, seront pour lors $PA = PM = CF = CA$, $PD = PN = CH = CD$, $QA = QM = BF = BA$, & $QD = QN = BG = BD$. Donc alors la diagonale infinie AD ($PA + PD$) $= CA + CD$, & AD ($QA + QD$) $= BA + BD$; c'est-à-dire, dans ce cas-ci des points fixes B, C, comme dans celui (*art. 1.*) de ces deux points mobiles, que la diagonale AD d'un parallélogramme quelconque ABDC est toujours égale à la somme de ses côtez CA, CD, ou BA, BD, lorsque l'angle BAC, ou BDC en est aigu.

III. Les angles ABD, ACD du parallélogramme ABDC, devenant obtus comme dans le précédent art. 2. par l'écartement vers M, N, de leurs côtez autour de leurs sommets fixes B, C; on voit que la diagonale BC ne change point pendant que l'autre diagonale AD, & tous les côtez de ce parallélogramme changent comme dans cet art. 2. jusqu'à devenir infinis par cet écartement fait jusqu'au parallélisme de ces lignes entr'elles. D'où l'on voit que ce cas des angles ABD, ACD, devenus infiniment obtus par un tel mouvement de leurs côtez autour de leurs sommets fixes B, C, n'est point compris dans la Part. 2. de ce Lemme-ci; & qu'ainsi la démonstration qu'on a donnée ci-dessus de cette Part. 2. en comprend toute l'étendue.

Quant à la part. 1. elle comprend les deux cas des sommets B, C, fixes ou mobiles des angles ABD, ACD, & outre la démonstration qu'on en a donnée d'abord dans toute cette étendue, les deux précédens art. 1. 2. en fournissent encore une nouvelle plus sensible de la même étendue.

LEMMEX.

FIG. 22. 23.

24. 25. 26.

Soit un parallélogramme quelconque GICE, avec une ligne droite HP, posée comme l'on voudra par rapport à lui, dans le même ou dans différens plans, il n'importe. Si des quatre angles ou pointes G, I, C, E, de ce parallélogramme on mène à volonté quatre plans exprimez en profil par GL, IP, CH, EV, tous parallèles entr'eux; & que de ces quatre pointes jusqu'à HP, on tire le long de ces plans autant de lignes droites GL, IP, CH, EV, lesquelles rencontrent HP en L, P, H, V, de quelque manière que ce soit: je dis que la partie de celle-ci, par exemple, HL, comprise entre deux GL, CH, de celles-là, lesquelles partent des points GC, diagonalement opposez, est toujours égale à la somme de ses autres parties HV, HP, lorsque les points V, P, se trouvent du même côté de H, comme dans les Fig. 21. 22. ou à la différence de ces mêmes parties HV, HP, lorsque ces points V, P, se trouvent de différens côtes de H, comme dans les Fig. 23. 24. 25. c'est-à-dire, $HL = HV + HP$, dans le cas des Fig. 21. 22. & $HL = HV - HP$, comme dans celui des Fig. 23. 24. ou $HL = HP - HV$, comme dans la Fig. 25.

DEMONSTRATION.

Menez les diagonales IE, GC, qui se coupent chacune par la moitié en K; & après avoir conduit par ce point K un plan encore parallèle à ceux qu'on a supposé l'être par les pointes du parallélogramme GICE, faites tomber de ces quatre pointes ou angles G, I, C, E, quatre lignes GR, IM, CS, EN, toutes parallèles à HP, & qui rencontrent ce dernier plan en R, M, S, N. Enfin du point Q où ce dernier plan rencontre HP, menez QK, QR, QM, QS, QN. Cela

Cela fait, soit que ces cinq lignes en fassent plusieurs différentes, soit qu'elles se confondent en une seule, il est clair que puisque GR, IM, CS, EN, HP, sont toutes (*constr.*) paralleles entr'elles.

1°. IM & PQ sont dans un même plan avec PI & QM; ainsi puisque PI & QM se trouvent dans des plans (*Hyp.*) paralleles entr'eux, elles seront aussi paralleles entr'elles, & par consequent MP sera un parallelogramme. On prouvera de même que RL, SH, & VN, sont autant de parallelogrammes. Donc $IM=PQ$, $GR=LQ$, $CS=HQ$, & $EN=VQ$.

2°. De ce que IM, EN, sont (*constr.*) paralleles entr'elles, il suit aussi que les angles MIK, NEK, sont égaux entr'eux, & que ces deux lignes sont dans un même plan avec IE. Par consequent si l'on mene KM, KN, ces deux lignes-ci seront aussi dans ce même plan IMEN; ainsi puisqu'elles sont encore (*constr.*) dans un autre plan qui passe par KQ, elles seront la commune section de ces deux plans; & par consequent elles ne font ensemble qu'une même ligne droite. Ce qui donnant encore les angles IKM, EKN, égaux entr'eux, il suit manifestement que les triangles IMK, ENK, sont semblables, & que puisque $IK=KE$, l'on aura aussi $IM=EN$. On prouvera de même que les triangles GKR, CKS, sont semblables entr'eux, & que puisque $GK=CK$, l'on aura aussi $GR=CS$.

Or on vient de voir (*constr.*) que $IM=PQ$, $EN=VQ$, $GR=LQ$, $CS=HQ$. Donc (*nomb. 2.*) $PQ=VQ$, & $LQ=HQ$. Donc aussi $LP=HV$. Donc enfin $HL=HV+HP$ dans le cas des Fig. 22. 23. où V, P, se trouvent du même côté de H; & dans celui où V, P, se trouvent de differens côtes de H, l'on aura $HL=HV-HP$ comme dans les Fig. 24. 25. où $HL=HP-HV$, comme dans la Fig. 26. Ce qu'il falloit démontrer.

S'il se trouve des Commenceans qui, embarrassés par la multitude des Fig. 21. 22. 23. 24. 25. auxquelles cette démonstration convient, ayent de la peine à l'appliquer à tou-

tes à la fois ; ils pourront d'abord l'appliquer à chacune séparément , en les prenant l'une après l'autre à volonté. Après cela ils verront sans peine que cette démonstration convient également à toutes ces cinq Figures , & même à plusieurs autres qu'ils imagineront aisément alors , & que j'omets tant pour leur en laisser le plaisir , que pour ne pas multiplier inutilement le nombre de celles-ci. Ils pourront en user de même dans tout ce qu'ils trouveront ici de propositions à plusieurs cas ou Figures.

COROLLAIRE I.

Fig. 27.

Soit présentement par A dans des plans quelconques tant de parallelogrammes aussi quelconques qu'on voudra , dont le premier soit ABCD , de qui la diagonale AD soit un des côtes du second ADLM , de qui la diagonale AL soit aussi un des côtes du troisième ALPN , de qui la diagonale AP soit pareillement un des côtes du quatrième , & ainsi à l'infini. Des extrêmités C , B , M , N , &c. des côtes non diagonaux de ces parallelogrammes soient autant de plans paralleles , & sur eux autant de droites CF , BH , MG , NE , &c. qui rencontrent sous quelque angle que ce soit en F , H , G , E , &c. la diagonale du dernier de ces parallelogrammes , c'est-à-dire , ici la diagonale AP du parallelogramme ALPN , prolongée vers O , E , il suit du présent Lem. 10. que cette dernière diagonale $AP = AF + AG + AH - AE$.

Car suivant ce Lemme , si des extrêmités D , L , &c. des côtes diagonaux AD , AL , &c. des parallelogrammes précédens , l'on mene aussi des plans paralleles aux paralleles précédens , & sur lesquels soient les droites DV , LX , &c. lesquelles rencontrent en V , X , &c. la dernière diagonale AP prolongée , dont AD représente ici la droite HP des précédentes Fig. 22. 23. 24. 25. 26. Le premier parallelogramme ACBD donnera $AV = AF + AH$; le second ADLM donnera $AX = AV + AG$, & conséquemment $AX = AF + AH + AG$; le troisième ALPN donnera $AP = AX - AE$, & conséquemment

$AP = AF + AH + AG - AE$, ainsi qu'on le vient d'avancer. Ce raisonnement fait voir qu'il en sera de même à l'infini, quelque nombre de parallelogrammes quelconques faits comme ci-dessus, qu'on suppose dans des plans aussi quelconques avoir tous le même points A pour un de leurs angles par où passent les diagonales dont on vient de parler: la dernière de ces diagonales, telle qu'est ici AP, sera toujours $= AF + AH + AG - AE$, &c. C'est-à-dire, égale à la somme de ce que les côtez non diagonaux AC, AB, AM, AN, &c. y donneront d'abscisses AF, AH, AG, &c. depuis A vers l'autre extrémité P de cette dernière diagonale, moins la somme AE, &c. de ce que ces côtez non diagonaux y en donneront au-delà du point A du côté de E.

C O R O L L A I R E II.

Toutes choses demeurant les mêmes, supposons presentement que le point A, ou un corps en ce point, soit poussé ou tiré tout à la fois suivant AC, AB, AM, AN, &c. par autant de puissances appellées C, B, M, N, &c. lesquelles soient entr'elles comme ces lignes correspondantes. Les Corol. 6. 7. du Lem. 2. & le Corol. 10. du Lem. 3. font voir que l'impression résultante au point A, du concours de toutes ces puissances, est toujours non seulement suivant la dernière diagonale, qui est ici AP celle du dernier ALPN des parallelogrammes précédens; mais encore d'une force de A vers P, laquelle est toujours à chacune des puissances supposées suivant AC, AB, AM, AN, comme cette dernière diagonale AP est à chacun de ces côtez proportionnels (*Hyp.*) à ces puissances C, B, M, N. Mais le précédent Corol. 1. donne ici $AP = AF + AH + AG - AE$. Donc aussi la force du point ou corps A suivant AP, résultante du concours de toutes ces puissances-là, est toujours à chacune d'elles, comme $AF + AH + AG - AE$ est à chacune de leurs proportionnelles AC, AB, AM, AN, & ainsi à l'infini en quelque nombre qu'elles soient.

COROLLAIRE III.

Fig. 28. On voit de-là que si EO est la direction de la force résultante du concours des puissances C, B, M, N, c'est-à-dire, la direction suivant lesquelles ces puissances tendent ensemble à pousser le point ou corps A vers O; & conséquemment (Lem. 2. Corol. 6. & Lem. 3. Corol. 10.) celle de la dernière diagonale AP des parallelogrammes précédens de la Fig. 27. l'on aura, sans en faire aucun, la longueur de cette dernière diagonale; & conséquemment (Lem. 2. Corol. 7. & Lem. 3. Corol. 10.) l'on aura aussi la force résultante du concours de ces puissances, suivant cette direction commune AO, si des extrêmités C, B, M, N, de leurs proportionnelles & directions particulières AC, AB, AM, AN, on lui mène seulement les paralleles CF, BH, MG, NE, quel qu'angle qu'elles fassent avec elle; puisque le Corol. 1. donne toujours $AF + AG + AH - AE = AP$: c'est-à-dire en general, la dernière diagonale de tant de parallelogrammes qu'on voudra, faits comme ci-dessus, toujours égale à la différence $AF + AG + AH - AE \pm$, &c. dont la somme $AF + AG + AH +$, &c. des abscisses AF, AG, AH, &c. faites sur elle de son côté par rapport à A par des paralleles menées comme ci-dessus, surpasse la somme $AE +$, &c. de ce qui s'en fait sur elle prolongée de l'autre côté de ce point A, où concourent (Hyp.) les puissances supposées C, B, M, N, &c. Et d'où partent leurs proportionnelles & directions particulières AC, AB, AM, AN, &c. de l'extrêmité desquelles font menez des plans paralleles quelconques exprimez par CF, BH, MG, NE, &c. qui déterminent ces abscisses AF, AH, AG, AE, &c. par leur rencontre avec EO.

REMARQUE.

I. Il est à remarquer que quoique $AF + AG + AH - AE \pm$, & soit toujours (Corol. 1.) égale à la diagonale du dernier des parallelogrammes qu'il auroit fallu faire

comme dans le Corol. 1. pour la trouver, sans se servir des lignes précédentes CF, BH, MG, NE, &c. menées sur des plans paralleles, par les extrêmités des proportionnelles AC, AB, AM, AN, &c. aux puissances C, B, M, N, &c. qu'on suppose agir toutes à la fois suivant ces directions particulieres, chacune suivant la sienne, sur le corps ou point A; & qu'ainsi (*Lem. 2. Cor. 7. & Lem. 3. Corol. 10.*) $AF - AH - AG - AE \pm$, &c. soit toujours l'expression de la force résultante du concours de toutes ces puissances suivant leur direction commune AO; les parties correspondantes AF, AH, AG, AE, &c. de cette expression, n'expriment pourtant pas toujours ce que chacune de ces puissances C, B, M, N, &c. contribue à cette force totale de A vers O suivant AO, c'est-à-dire, ce que chacune d'elles y employe de force pour ou contre, mais seulement lorsque (*Lem. 3. part. 2.*) les lignes droites CF, BH, MG, NE, &c. ou les plans paralleles sur lesquels on les suppose, sont perpendiculaires à cette direction commune AO prolongée de part & d'autres: lorsqu'elles le sont, chacune de ces puissances C, B, M, N, &c. est toujours (*Lem. 3. part. 2.*) à ce qu'elle fait d'impression pour ou contre suivant cette direction AO, ou AE, sur le point ou corps A, comme celle de leurs proportionnelles AC, AB, AM, AN, &c. qui l'exprime, est à celle des abscisses AF, AH, AG, AE, &c. qui lui répond. Par exemple, dans ce cas de perpendicularité des lignes CF, BH, MG, NE, &c. sur AO, la puissance C dirigée suivant sa proportionnelle AC, est à ce qu'elle fait d'effort suivant AO :: AC. AF. & ainsi des autres en quelque nombre qu'elles soient, quelques rapports qu'elles aient entr'elles, & suivant quelques directions qu'elles agissent sur le corps ou point A.

II. De-là il suit encore que $AF - AH - AG - AE \pm$ &c. = AP pour ce cas des lignes CF, BH, MG, NE, &c. perpendiculaires sur cette ligne AP prise pour la dernière diagonale qui (*Lem. 2. Corol. 7. & Lem. 3. Corol. 10.*) exprime l'effort résultant au corps ou point A du con-

cours des puissances appellées ici C, B, M, N, &c. Car puisque cet effort total suivant cette dernière diagonale AP, n'est fait que des efforts particuliers de ces puissances suivant cette ligne, ou plutôt n'est que la somme de ce qu'elles en font de A vers P suivant cette ligne, moins ce qu'elles en font suivant la même ligne en sens contraire, & que ces efforts particuliers sont (*Lem. 3. part. 2.*) comme les abscisses AF, AH, AG, AE, &c. dont les premières AF, AH, AG, &c. expriment ici ces efforts de A vers P suivant AP, & les dernières AE, &c. ce qui s'en fait suivant la même ligne en sens contraire: il suit, dis-je, du précédent art. 1. que ce cas des lignes CF, BH, MG, NE, &c. perpendiculaires à cette ligne AP prolongée de part & d'autre du point A, l'on aura encore cette dernière diagonale $AP = AF + AH + AG - AE +$, &c. conformément au précédent Corol. 3. dont ceci n'est qu'un cas, l'angle que les précédens plans paralleles entr'eux, ou que les lignes CF, BH, MG, NE, &c. menez sur eux, font avec cette dernière diagonale AP, y étant indéterminé, & tel qu'on voudra, au lieu que cette dernière preuve le suppose droit.

III. Il est aussi à remarquer que puisque l'impression résultante du concours de toutes les puissances C, B, M, N, &c. au point ou corps A, le pousse (*Hyp.*) suivant AO, en sorte que libre d'ailleurs il suivroit cette droite de A vers O; il faut que ce que ces puissances font chacune d'effort sur lui (*Lem. 3. part. 1.*) suivant chacune des correspondantes FC, HB, GM, EN, &c. perpendiculaires à AO, pour (*art. 1.*) le détourner de cette ligne AO, se trouve en équilibre & détruit, comme l'on voit dans la part. 3. du Lem. 3. par la contrariété directe de ces efforts collatéraux entr'eux; & qu'ainsi ce qui s'en fait de droite à gauche de cette direction commune AO, soit toujours égal à ce qui s'en fait de gauche à droite; & de même de tous les autres côtez diamétralement opposés autour de AO. D'où l'on voit que si les quatre directions particulieres AC, AB, AM, AN, étoient dans un

même plan deux d'un côté, & deux de l'autre de la direction commune AO, comme elles paroissent ici, l'on y auroit $FC + HB = GM + EN$; puisque FC, HB, GM, EN, seroient entr'elles (Lem. 3. part. 1.) comme les efforts des puissances C, B, M, N, en ces deux sens, & que les deux premiers seroient ainsi diamétralement opposés aux deux autres.

D E F I N I T I O N X I I.

Pour éviter les équivoques dans la suite nous appellerons *puissances libres* celles qui par leur concours d'action sur un corps ou sur un point, le mouvroient effectivement comme dans le principe general, & dans les Lem. 1. 2. 3. Et lorsqu'elles en seront empêchées par quelque obstacle, ou par quelqu'autre puissance qui, égale & directement opposée à leur concours d'action, les arrête toutes en équilibre avec elle sur ce corps ou sur ce point; nous les appellerons toutes puissances forcées ou retenues. Suivant cela en appellant (comme nous ferons toujours dans la suite) n le nombre des puissances libres, & m celui des forcées, nous aurons toujours alors $m = n + 1$.

L E M M E X I.

Soient encore (comme dans le Cor. 1. du précédent Lem. 10.) F i g. 12^e
par le point A dans des plans quelconques tant de parallelogrammes aussi quelconques qu'on voudra, dont le premier soit ACDB, de qui la diagonale AD soit un des côtesz du second ADLM, de qui la diagonale AL soit aussi un des côtesz du troisiéme ALPN, de qui la diagonale AP soit pareillement un des côtesz d'un quatriéme, & ainsi à l'infini. Par les extrémitéz C, B, des côtesz AC, AB, du premier ACDB de ces parallelogrammes soit une seconde diagonale CB, qui rencontre la premiere AD en Q; de ce point Q par l'extrémité M du côté AM du second parallelogramme ADLM, soit QM qui rencontre sa diagonale AL en R; de ce point R par l'extrémité N du côté AN du troisiéme parallelogramme ALPN, soit RN qui rencontre sa diagonale AP en S, &c.

toûjours de même jusqu'à la dernière, laquelle soit ici *AP* pour ne pas aller à l'infini.

Cela fait, je dis que la partie *AS* de cette dernière diagonale sera à cette diagonale entière *AP*, comme l'unité est au nombre des côtez non diagonaux *AC*, *AB*, *AM*, *AN*, des parallelogrammes supposez, ou (ce qui revient au même) comme l'unité est au nombre de ces parallelogrammes plus un: c'est-à-dire ici, *AS. AP :: 1. 4.*

DEMONSTRATION.

Les parallelogrammes *ALPN*, *ADLM*, *ACDB*, donnant $NP=AL$, $ML=AD=2 \times AQ$, les triangles semblables *ASR*, *PSN*, & *ARQ*, *LRM*, donneront *AS. SP :: AR. NP :: AR. AL :: AR : AR + RL :: AQ. AQ + ML :: AQ. AQ + AD :: AQ. AQ + 2 \times AQ :: AQ. 3 \times AQ :: 1. 3.* Donc aussi *AS. AS + SP :: 1. 1 + 3.* c'est-à-dire, *AS. AP :: 1. 4.* Et ainsi dans le dernier de tout ce qu'on peut ajoûter d'autres parallelogrammes à ceux-ci de la maniere précédente: la dernière diagonale s'y trouvera toûjours divisée de la maniere précédente en deux parties, dont la plus proche du point *A* sera à cette diagonale entière, comme l'unité sera au nombre des côtez non diagonaux de tous ces parallelogrammes, ou (ce qui revient au même) comme l'unité sera au nombre de ces parallelogrammes plus un. De sorte que si le nombre des côtez non diagonaux étoit $=n$, & que conséquemment le nombre de ces parallelogrammes fût $=n-1$. la partie la plus proche de *A* de la dernière diagonale divisée en deux comme ci-dessus, seroit à cette diagonale entière $:: 1. n$. Ce qu'il falloit démontrer.

C'est *M. Leibnitz* qui m'a fait penser à ce Lemme, dont il n'a donné que l'énoncé, avec quelques explications dans le *Journal des Sçavans de 1693. pag. 417.* L'usage qu'il me parut pouvoir avoir dans mon *Projet d'une nouvelle Mécanique de 1687.* me fit en chercher la démonstration, que je trouvai aussi-tôt telle qu'on la voit ici: cet usage paroîtra dans

COROLLAIRE

COROLLAIRE I.

Si donc le point A, ou un corps (sans pesanteur) exprimé par A, étoit poussé ou tiré à la fois suivant AC, AB, AM, AN, &c. par autant de forces ou puissances proportionnelles à ces côtez de parallelogrammes, & dirigées suivant ces lignes; non seulement il seroit poussé ou tiré (*Lem. 3. Corol. 10.*) par le concours de toutes ces puissances ensemble suivant la dernière diagonale AP, d'une force qui seroit à celles-là comme cette dernière diagonale aux côtez AC, AB, AM, AN, qui leur sont (*Hyp.*) proportionnels; mais encore cette dernière diagonale AP seroit à sa partie AS, comme le nombre des puissances à l'unité; puisque (*Hyp.*) le nombre de ces puissances seroit celui de ces côtez non diagonaux, ou celui des parallelogrammes plus un.

COROLLAIRE II.

On voit de-là suivant ce Lemme-ci, que la dernière diagonale AP étant donnée, ou sa partie AS, il est aisé de trouver l'une par l'autre ayant le nombre des puissances; sçavoir ici $AP = 4 \times AS$, & $AS = \frac{1}{4} AP$: mais si l'une ni l'autre n'étoit donnée que de position AO, comme dans la Fig. 30. par rapport aux proportionnelles & directions AC, AB, AM, AN, &c. des puissances appellées C, B, M, N, &c. dont le nombre soit n , il faudroit avoir recours au Corol. 3. du Lem. 10. lequel sans faire aucun parallelogramme, donneroit la dernière diagonale cherchée $AP = AF + AH + AG - AF \pm$, &c. en menant seulement des extrêmités des proportionnelles précédentes les paralleles CF, BH, MG, NE, &c. sous quelque angle qu'elles rencontrent la direction donnée AO de cette diagonale cherchée AP prolongée de part & d'autre: de-là le présent Lem. 11. donnant $AS = \frac{AP}{n}$, l'on auroit aussi $AS = \frac{AF + AH + AG - AE \pm \&c.}{n}$ sans (dis-je) fai-

FIG. 27.
28.

K

re aucun parallelogramme. D'où l'on voit suivant le précédent Corol. 1. que l'unité seroit ici au nombre n des puissances, comme $\frac{AF+AH+AG-AE+\&c.}{n}$ à la dernière diagonale cherchée AP, qui se trouvera ainsi dans la Fig. 28. sans y faire aucun des parallelogrammes qui l'ont donnée dans la Fig. 27. Corol. 1. du Lem. 10.

COROLLAIRE III.

Fig. 29.

Mais cela suppose qu'on ait la position AO de la dernière diagonale AP, par rapport aux directions données des puissances. Presentement pour trouver cette position il faut considerer,

1°. Que $BQ=CQ$, ou $BQ.CQ :: 1. 1.$ Puisque $BQ.CQ :: AB.CD :: 1. 1.$

2°. Que $RM.RQ :: 2. 1.$ Puisque $RM.RQ :: LM.AQ :: AD.AQ :: BC.CQ$ (*nomb. 1.*) $:: 2. 1.$

3°. Que $NS.RS :: 3. 1.$ Puisque $NS.RS :: NP.AR :: AL.AR :: QM.QR$ (*nomb. 2.*) $:: 3. 1.$ Et ainsi à l'infini.

D'où l'on voit que les directions AC, AB, AM, AN, &c. des puissances C, B, M, N, &c. étant données proportionnelles à ces mêmes puissances, si par les extrémités des deux premières AC, AB, on mene la droite BC, son milieu Q avec A donnera la position de la première diagonale AD. Si l'on mene ensuite de ce point Q la droite QM à l'extrémité M de la troisième proportionnelle AM, laquelle QM soit divisée en R de maniere qu'on ait $RM.RQ :: 2. 1.$ ce point R avec A donnera la position de la seconde diagonale AL. Si après cela du point R on mene la droite RN à l'extrémité N de la quatrième proportionnelle AN, laquelle RN soit divisée en S de maniere qu'on ait $NS.RS :: 3. 1.$ ce point S avec le point A donnera la position de la troisième diagonale AP; & ainsi à l'infini, en divisant de même en raison reciproque de 1 à 4, la ligne qui de S se termineroit à l'ex-

extrêmité d'une cinquième proportionnelle ; la suivante en raison reciproque de 1 à 5 ; la suivante encore en raison reciproque de 1 à 6 , & toujours de même les suivantes , en raison réciproque de 1 à 7 , de 1 à 8 , de 1 à 9 , de 1 à 10 , &c.

C'est-à-dire en general (en appellant les droites BC, QM, RN, &c. *Lieux des puissances* : sçavoir ici BC, *Lieu des deux puissances* C, B ; QM, *Lieu des trois puissances* C, B, M ; RN, *Lieu des quatre puissances* C, B, M, N ; &c. qu'en divisant chaque Lieu en raison reciproque de l'unité de la puissance , à la proportionnelle de laquelle il se termine par un bout , au nombre des puissances du lieu auquel il se termine par l'autre bout , de même que RN ici divisée en SN. SR :: 3. 1. l'est en raison reciproque de l'unité de la puissance N au nombre 3. des puissances C, B, M, du Lieu QM : on voit , dis-je, en general que le point d'une telle division de chaque Lieu , donnera toujours avec A la position de la diagonale , suivant laquelle se fait le concours d'action de toutes les puissances de ce Lieu , de même que le point S du Lieu RN ainsi divisé en ce point S , donne avec le point A la position de la diagonale AP, suivant laquelle se fait ici (*Lem. 3. Corol. 10.*) le concours d'action des quatre puissances C, B, M, N, de ce Lieu RN.

COROLLAIRE IV.

Suivant cela, & le Corol. 2. il sera toujours aisé de trouver la position & la longueur de la dernière diagonale de tant de parallelogrammes qu'on voudra , faits comme dans le present Lemme 11. sans en faire aucun, ayant seulement les directions AC, AB, AM, AN, &c. des puissances C, B, M, N, &c. proportionnelles à ces mêmes lignes : voici comment.

1°. Ces proportionnelles ayant été prises jusqu'ici dans un ordre arbitraire, le Corol. 3. fait voir que si par les extrêmités C, B, de deux quelconques AC, AB, d'entr'elles on mene la droite CB ; que de son milieu Q on

mene QM à l'extrémité M d'une troisième proportionnelle aussi quelconque AM , laquelle QM soit divisée en R , de manière qu'on ait $RM.RQ :: 2. 1$. Qu'ensuite on mene RN à l'extrémité N d'une quatrième proportionnelle encore quelconque AN , laquelle RN soit divisée en S , de manière qu'on ait $SN.SR :: 3. 1$. l'on aura AS prolongée vers O pour la position de la dernière diagonale AP des parallelogrammes faits comme dans ce Lemme-ci, sans en faire aucun; & ainsi de quelque autre nombre de puissances, ou de leurs proportionnelles qu'on puisse supposer. De sorte que si n étoit le nombre des puissances, lesquelles prises dans l'ordre précédent eussent QM pour le lieu de toutes, hors de la dernière N ; l'analogie $SN.SR :: n-1. 1$. donneroit AS pour la position AO de la diagonale du dernier des parallelogrammes faits comme dans ce Lemme-ci.

2°. La position AO de la diagonale du dernier de ces parallelogrammes étant ainsi trouvée, ce Lemme-ci donnera la longueur AP de cette dernière diagonale $= 4 \times AS$, s'il n'y a (comme ici) que trois parallelogrammes, que les quatre puissances C, B, M, N ; & en general cette longueur sera $= n \times AS$, si le nombre des puissances est $= n$, ou celui des parallelogrammes $= n-1$.

Le Corol. 2. donnera aussi la longueur de cette dernière diagonale $= AF + AH + AG - AE + \&c.$ dans la Fig. 28. sans faire aucun parallelogramme, en laissant tomber des extrémités des directions proportionnelles AC, AB, AM, AN , &c. des puissances C, B, M, N , &c. autant de perpendiculaires CF, BH, MG, NE , &c. sur la position AO (de cette diagonale) trouvée dans le nomb. 1.

COROLLAIRE V.

Fig. 29. Ce dernier Corol. 4. fournit la manière de déterminer la route ou la direction & la force d'un corps poussé ou tiré par le concours de plusieurs puissances données, & de directions données qui partent d'un même point, sans faire aucun parallelogramme. Car puisque ce corps par le con-

cours de toutes ces puissances quelconques, quelles qu'en soient les directions & le nombre, doit (*Lem. 3. Corol. 10.*) être poussé ou tiré suivant la diagonale du dernier des parallelogrammes faits (comme ci-dessus) de leurs directions proportionnelles, & avec une force qui soit à chacune de ces puissances comme cette diagonale à chacune de leurs proportionnelles; & que le précédent Corol. 4. donne la position & la longueur de cette dernière diagonale, sans faire aucun parallelogramme, il donnera aussi sans en faire aucun, la route ou la direction & la force du corps poussé ou tiré par toutes ces puissances à la fois, c'est-à-dire (*Def. 7.*) la direction commune de toutes ces puissances, & la force résultante de leur concours suivant cette direction. De sorte que si ce corps est poussé ou tiré à la fois, par exemple, par quatre puissances C, B, M, N, données avec leurs directions particulières AC, AB, AM, AN, lesquelles soient proportionnelles à ces puissances, il n'y aura qu'à mener la droite CB; ensuite de son milieu Q mener la droite QM, laquelle soit divisée en R, de manière qu'on ait $RM.RQ :: 2. 1$. Après cela mener RN, qui soit aussi divisée en S, mais de manière qu'on ait $SN.SR :: 3. 1$. Enfin mener AS prolongée vers O, sur laquelle soit prise $AP = 4 \times AS$: cette droite AP fera (*Corol. 3.*) de position & de grandeur la diagonale du dernier des parallelogrammes qui auroient été faits (comme dans ce Lemme-ci, Fig. 29.) des proportionnelles supposées. Donc (*Lem. 3. Corol. 10.*) les quatre puissances ici supposées C, B, M, N, pousseront ou tireront ensemble le long de cette ligne AP ou AS le corps auquel elles sont appliquées, & d'une force qui sera à chacune d'elles comme cette même AP ou sa valeur $4 \times AS$ est à chacune de leurs proportionnelles AC, AB, AM, AN. Et ainsi de tout autre nombre de puissances à volonté, qu'on supposeroit agir à la fois sur ce corps suivant des directions qui partissent d'un même point.

Fig. 30

COROLLAIRE VI.

Les divisions précédentes supposées des lignes CB, QM, NR, &c. en Q, R, S, &c. on voit (*Corol. 5.*) que l'effort résultant du concours des deux puissances C, B, se feroit suivant AQ; que le résultant du concours des trois puissances C, B, M, se feroit suivant AR; que le résultant du concours des quatre puissances C, B, M, N, se feroit suivant AS, & ainsi de tant de puissances qu'on voudra supposer agir toutes à la fois sur un même point A, de quelque manière que ce soit. Donc suivant le *Corol. 1.* du principe general (si les lieux CB, QM, NR, &c. étoient autant de verges inflexibles & sans pesanteur, auxquelles les puissances C, B, M, N, &c. sans changer de direction, étoient appliquées comme on le voit ici) il y auroit équilibre entre les deux puissances C, B, sur un appui placé en Q; entre les trois puissances C, B, M, sur un appui placé en R; entre les quatre puissances C, B, M, N, sur un appui placé en S, & ainsi de tel autre nombre de puissances qu'on voudra, dirigées toutes par A. D'où l'on voit (*Déf. 8.*) que Q est le centre d'équilibre des deux puissances C, B; que R est celui des trois puissances C, B, M; que S est celui des quatre puissances C, B, M, N, &c. sur les verges ou lignes CB, QM, RN, &c. supposées inflexibles & sans pesanteur.

DEFINITION XIII.

Ces points Q, R, S, &c. seront appelez dans la suite *centres principaux d'équilibre* de ces puissances C, B, M, N, &c. sçavoir Q, *centre principal d'équilibre des puissances C, B*; R, *centre principal d'équilibre des puissances C, B, M*; S, *centre principal d'équilibre des puissances C, B, M, N*; & ainsi de tout autre nombre de puissances libres dirigées toutes par le point A, suivant quelques plans que ce soit.

DEFINITION XIV.

Les pesanteurs particulieres de toutes les parties d'un

poids quelconque pouvant être regardées (Ax. 2.) comme autant de puissances qui agissent ensemble sur lui de haut en bas avec des forces égales à ces pesanteurs, & suivant les mêmes directions qu'elles ; il suit du Corol. 10. du Lem. 3. qu'il en doit résulter à ce corps entier une impression ou force totale de haut en bas, qui en fasse la *pesanteur* totale, & suivant une ligne qui (Déf. 3.) en soit la *direction*. Quelle que soit cette ligne de direction de la pesanteur d'un corps, elle s'appellera *verticale* dans la suite ; & les perpendiculaires à celle-là, seront nommées *horizontales*. Si en quelque sens qu'on tourne ce poids, la direction de sa pesanteur passe toujours par un même point de ce corps, ce point s'appellera à l'ordinaire le *centre de gravité* de ce même corps.

C O R O L L A I R E.

Le Corol. 1. du principe general fait voir qu'un poids qui auroit un tel point, quelque situation qu'on lui donnât autour de ce point, il y demeureroit toujours en équilibre & en repos tant que ce point seroit soutenu, ou fixement arrêté, nonobstant la mobilité de ce corps autour de ce même point fixe.

On verra dans la suite si un tel centre de gravité est possible, & en quel sens ; c'est-à-dire, quelles doivent être pour cela les directions des pesanteurs particulieres de toutes les parties des poids. En attendant nous ne nous servirons point des centres de gravité, mais seulement des directions de ces poids, lesquelles se trouvent toujours (Corol. 2. princip. gener.) être les lignes suivant lesquelles ils demeurent suspendus.

L E M M E XII.

Soit un parallelogramme quelconque MDNG, dont les deux côtez DM, DN, prolongez (s'il est necessaire) soient rencontrés perpendiculairement en H, K, par les deux côtez HR, KR, d'un angle aussi quelconque HRK placé en même plan. Je dis que si $HR \times DM = KR \times DN$, ou (ce qui revient au même) si $HR. KR :: DN. DM$. La diagonale DG du pa-

FIG. 33
32.

rallelogramme $MDNG$, prolongée (s'il est nécessaire) passera par l'angle R .

DEMONSTRATION.

Si l'on nie que la diagonale DG passe par l'angle R , soit menée la droite DR , qui soit prise pour le sinus total; soit aussi prise f pour la marque ou la caractéristique des autres sinus. Les angles (*Hyp.*) droits en H , K , donneront $fHDR. fKDR :: HR. KR$ (*Hyp.*) :: $DN. DM :: MG. DM$ (*Lem. 8. Cor. 2.*) :: $fMDG. fMGD :: fMDG. fNDG$. Cependant si DG ne se confondoit pas avec DR , l'on auroit ici $fHDR$ à $fKDR$ en moindre raison que $fMDG$ à $fNDG$; & en plus grande, si DR y étoit de l'autre côté de DG . Donc ces deux lignes DG, DR , doivent se confondre en une; & par conséquent la diagonale DG ainsi confondue avec DR , & prolongée, s'il est nécessaire, passera comme DR par l'angle R . *Ce qu'il falloit démontrer.*

LEMME XIII.

Fig. 33. Par un point D donné dans un angle donné HAG , mener une ligne droite BC , que ce point D divise en raison donnée de m à n , c'est-à-dire, en sorte qu'on ait $BD. DC :: m. n$.

SOLUTION.

Sur AD prolongée du côté de D , soit prise $DE. AD :: n. m$. Soit menée EC parallèle à AG , & qui rencontre AH en C ; de ce point C par le donné D soit menée CD , qui prolongée rencontre AG en B : je dis que CB est la ligne requise, c'est-à-dire, que non seulement elle passe par le point donné D , mais encore qu'elle y est divisée de manière que $BD. DC :: m. n$. ainsi qu'il est ici requis.

DEMONSTRATION.

Puisque AB, EC , sont (*constr.*) parallèles entr'elles, & qu'ainsi les triangles ADB, EDC , sont semblables entr'eux, l'on aura ici $DC. DB :: DE. DA$ (*constr.*) :: $n. m$.

Donc

Donc (en renversant) $BD.DC::m.n.$ Ce qu'il falloit faire & démontrer.

LEMME XIV.

Deux points A, B , étant donnez à volonté, mener du premier A deux lignes AD, AC , de grandeurs donnees P, Q ; & du second B , une ligne BC , laquelle soit divisée en D, C , par ces deux-là, en raison donnée de m à n : c'est-à-dire, en sorte qu'on ait ici tout à la fois $AD=P, AC=Q$, & $BD.DC::m.n.$ Fig. 34

SOLUTION.

Soit menée AB par les deux points donnez A, B , & sur elle prolongée du côté de B , soit prise AE . $AB::n.m.$ Des centres A, E , & des rayons $AF=\frac{m+n}{m}\times P, EF=Q$, soient décrits deux arcs de cercles qui se coupent en F ; ensuite après avoir mené AC, FC , parallèles à EF, EA , & qui se coupent en C , soit menée BC , que la droite AF coupe en C . Cela fait, je dis que $AC=Q, AD=P$, & que $BD.DC::m.n.$ ainsi qu'il est ici requis.

DEMONSTRATION.

Car le parallelogramme $AEFC$ résultant de cette construction, rendant $AC=EF$ (*Hyp.*) $=Q, CF=AE$, & les triangles ADB, FDC , semblables entr'eux, donne premièrement $AC=Q$; secondement, $FD.AD::FC.AB::AE.AB$ (*constr.*) $::n.m.$ D'où résulte (en composant) $m+n.m::AF\left(\frac{m+n}{m}\times P\right). AD=P$. Troisième-ment enfin $BD.DC::AB.FC::AB.AE$ (*constr.*) $::m.n.$ Donc cette même construction donnera ici tout à la fois $AC=Q, AD=P$, & $BD.DC::m.n.$ Ce qu'il falloit démontrer.

LEMME XV.

Soit une ligne droite XO mobile autour d'un de ses points X fixe, qui la divise en deux branches ou parties BX, BO , telles Fig. 35

qu'on voudra : imaginons-la se mouvoir de XO en $x\omega$ autour de ce point fixe B . Par un autre point quelconque A soient menées des points X, x, O, ω , les quatre droites $XA, xA, OA, \omega A$, sur lesquelles du point B tombent autant de perpendiculaires BD, Bd, BP, Bp . Je dis que la branche BX qui se sera ainsi approchée du point A en Bx , pendant que l'autre BO (moindre, plus grande, ou égale à elle ; il n'importe) s'en sera éloignée en $B\omega$, donnera toujours $BP \cdot BD > Bp \cdot Bd$. c'est-à-dire, BP à BD en plus grande raison que Bp à Bd .

DEMONSTRATION.

Après avoir pris $Xb, x\beta$, chacune égale à BO ou à $B\omega$, sur $OX, \omega x$, soient menées $bm, \beta\mu$, perpendiculaires sur AX, Ax , prolongées s'il en est besoin. Cela fait,

1°. En prenant $B\omega$ ou son égale βx pour le sinus total, l'on aura (Déf. 9. Corol. 1.) $\beta\mu$ à Bp comme le sinus de l'angle $\beta x\mu$ est au sinus de l'angle $B\omega p$, ou (Déf. 9. Corol. 1.) comme le sinus de l'angle $Bx A$ est au sinus de l'angle $B\omega A$; & conséquemment aussi (Lem. 8. Corol. 2.) comme $A\omega$ est à Ax , c'est-à-dire, $\beta\mu \cdot Bp :: A\omega \cdot Ax$. Mais les triangles (constr.) semblables $Bxd, \beta x\mu$, donnant $Bd \cdot \beta\mu :: BX \cdot \beta x$ (constr.) :: $BX \cdot BO$. Donc (en multipliant par ordre) $Bd \cdot Bp :: BX \times A\omega \cdot BO \times Ax$.

2°. En prenant encore BO ou son égale bX pour le sinus total, l'on aura de même (Déf. 9. Corol. 1.) BP à bm comme le sinus de l'angle BOP est au sinus de l'angle bXm ; & conséquemment aussi (Lem. 8. Corol. 2.) comme AX est à AO , c'est-à-dire, $BP \cdot bm :: AX \cdot AO$. Mais les triangles (constr.) semblables bmX, BDX , donnent $bm \cdot BD :: bX \cdot BX$ (constr.) :: $BO \cdot BX$. Donc (en multipliant par ordre) $BP \cdot BD :: BO \times AX \cdot BX \times AO$.

Ces nomb. 1. 2. donnant ainsi $Bd \cdot Bp :: BX \times A\omega \cdot BO \times Ax$. Et $BP \cdot BD :: BO \times AX \cdot BX \times AO$. l'on aura (en multipliant par ordre) $BP \times Bd \cdot BD \times Bp :: BO \times AX \times BX \times A\omega \cdot BX \times AO \times BO \times Ax :: AX \times A\omega \cdot AO \times Ax$. Mais la construction donnant $AX > Ax$, & $A\omega > AO$, donne pareillement $AX \times$

$A\omega > AO \times Ax$. Donc aussi $BP \times Bd > BD \times Bp$; & par conséquent $BP \cdot BD > Bp \cdot Bd$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

A U T R E D E M O N S T R A T I O N .

Soit menée la droite BA, & pour abréger nos expressions, soit \sin la caractéristique des sinus, en sorte que $\sin BAO$, $\sin BAX$, &c. signifient les sinus des angles BAO, BAX, &c. Cela posé, le Corol. 2. du Lem. 8. donnera $BO \cdot AO :: \sin BAO \cdot \sin ABO$. Le même Corol. 2. du Lem. 8. donnera aussi $AX \cdot BX :: \sin ABX \cdot \sin BAX$ (Déf. 9. Corol. 2.) $:: \sin ABO \cdot \sin BAX$. L'on aura de plus $AO \cdot AX :: AO \cdot AX$. Donc (en multipliant ces trois analogies par ordre) l'on aura $BO \cdot BX :: AO \times \sin BAO \cdot AX \times \sin BAX$. Par un semblable raisonnement on trouvera de même $B\omega \cdot Bx :: A\omega \times \sin BA\omega \cdot Ax \times \sin BAx$. Mais (Hyp.) $BO \cdot BX :: B\omega \cdot Bx$. Donc aussi $AO \times \sin BAO \cdot AX \times \sin BAX :: A\omega \times \sin BA\omega \cdot Ax \times \sin BAx$. Et conséquemment $AO \times Ax \times \sin BAO \times \sin BAX = AX \times A\omega \times \sin BAX \times \sin BA\omega$; d'où résulte $AX \times A\omega \cdot AO \times Ax :: \sin BAO \times \sin BAX \cdot \sin BAX \times \sin BA\omega$. Mais la construction donnant $AX > Ax$, & $A\omega > AO$, donne $AX \times A\omega > AO \times Ax$. Donc aussi $\sin BAO \times \sin BAX > \sin BAX \times \sin BA\omega$. Or en prenant AB pour le sinus total, l'on aura (Déf. 9. Corol. 1.) $BP = \sin BAO$, $BD = \sin BAX$, $Bp = \sin BA\omega$, & $Bd = \sin BAx$. Donc $BP \times Bd > BD \times Bp$. Par conséquent $BP \cdot BD > Bp \cdot Bd$. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

T R O I S I È M E D E M O N S T R A T I O N .

Toutes choses demeurant les mêmes, le Corol. 2. du Lem. 8. donnera,

$$1^{\circ} \sin BA\omega \cdot \sin A\omega B :: B\omega \cdot AB \text{ (constr.)} :: BO \cdot AB.$$

$$2^{\circ} \sin A\omega B \cdot \sin Ax B :: Ax \cdot A\omega.$$

$$3^{\circ} \sin Ax B \cdot \sin BAx :: AB \cdot Bx \text{ (constr.)} :: AB \cdot BX.$$

Donc (en multipliant par ordre) $\sin BA\omega \cdot \sin BAx :: BO \times Ax \cdot A\omega \times BX$. ou $\sin BAx \cdot \sin BA\omega :: A\omega \times BX \cdot BO \times Ax$. On trouvera de même $\sin BAO \cdot \sin BAX :: BO \times AX \cdot AO \times BX$. (Donc en multipliant encore par ordre) $\sin BAO \times \sin BAX \cdot \sin BAX \times \sin BA\omega :: BO \times AX \times A\omega \times BX$. $AO \times BX \times BO \times Ax ::$

$AX \times A\omega$. $AO \times Ax$, c'est-à-dire, $AX \times A\omega$. $AO \times Ax ::$
 $\int BAO \times \int BAx$. $\int BAX \times \int BA\omega$. comme dans la précédente
 Démonstration 2. Ce qui donnera ici comme là BP . $BD >$
 Bp . Bd . Ce qu'il falloit encore démontrer.

LEMME XVI.

FIG. 37.
 & suivantes
 jusqu'à 49.

Si sur les deux côtez contigus AB , AC , d'un parallelogramme quelconque $ABDC$, & sur la diagonale AD , qui passe par l'angle BAC (que j'appelle capital) compris entre ces deux côtez AB , AC , on fait autant de triangles ASB , ASC , ASD , d'un sommet commun S donné à volonté autre que le point A , sur le plan de ce parallelogramme $ABDC$: je dis,

FIG. 37.
 38. 39.

I. Que lorsque ce point S sera dans le complement (à deux droits) BAF ou CAF de l'angle capital BAC , comme dans les Fig. 37. 38. 39. Le triangle ASD construit sur la diagonale AD du parallelogramme proposé $ABDC$, sera toujours égal à la somme des deux autres triangles ASC , ASB , construits sur les côtez AC , AB , de cet angle capital BAC , c'est-à-dire, qu'alors on aura toujours $ASD = ASC + ASB$.

FIG. 40.
 41. 42. 43.

II. Que lorsque le point donné S sera dans l'angle capital BAC , ou dans son opposé EAF , comme on le voit dans les Fig. 40. 41. 42. 43. Le triangle ASD sera toujours égal à la difference des deux autres ASC , ASB , desquels le plus petit aura pour base le côté qui avec la diagonale fait des angles opposez, dans l'un desquels le point S se trouve, comme ici le triangle ASB , dont la base est le côté AB , qui avec la diagonale AD , forme les angles opposez DAB , KAE , dans un desquels ce point S se trouve : c'est-à-dire, qu'alors on aura par tout ici $ASD = ASC - ASB$.

FIG. 44.
 45. 46.

III. Que lorsque le point S sera sur un des côtez (prolongé ou non) de l'angle capital BAC du parallelogramme $ABDC$, comme on le voit sur AB dans les Fig. 44. 45. 46. Le triangle ASD sera toujours égal à celui qui aura pour base l'autre côté contigu AC de ce parallelogramme : c'est-à-dire, qu'alors on aura toujours ici $ASD = ASC$.

IV. Que si enfin le point *S* est sur la diagonale *AD* (prolongée ou non) comme dans les Fig. 47. 48. 49. l'on aura toujours $ASB = ASC$. Fig. 47. 48. 49.

DEMONSTRATION.

Préparation pour tous les cas. Si du sommet commun *S* des trois triangles *ASD*, *ASB*, *ASC*, dont il est ici question, l'on mene *SG* perpendiculaire en *G*, *H*, aux côtes parallèles *AC*, *BD*, du parallélogramme *ABDC*; l'on aura *GS*, *GH*, *HS*, pour les hauteurs des triangles *ASC*, *BAD*, *BSD*, au-dessus de leurs bases *AC*, *BD*, perpendiculaires (*constr.*) à ces hauteurs. Par conséquent on aura leurs aires $ASC = \frac{1}{2} AC \times GS$, $BAD = \frac{1}{2} BD \times GH = \frac{1}{2} AC \times GH$, $BSD = \frac{1}{2} AC \times HS$; ce qui donne,

$$1^{\circ}. BAD + BSD = \frac{1}{2} AC \times GH + \frac{1}{2} AC \times HS = \frac{1}{2} AC \times GH + HS \text{ (dans les Fig. 37. 39. 40. 42. 44. 47.)} \\ = \frac{1}{2} AC \times GS = ASC.$$

$$2^{\circ}. BAD - BSD = \frac{1}{2} AC \times GH - \frac{1}{2} AC \times HS = \frac{1}{2} AC \times GH - HS \text{ (dans les Fig. 38. 39. 41. 42. 45. 48.)} \\ = \frac{1}{2} AC \times GS = ASC.$$

$$3^{\circ}. BSD - BAD = \frac{1}{2} AC \times HS - \frac{1}{2} AC \times GH = \frac{1}{2} AC \times HS - GH \text{ (dans les Fig. 43. 46. 49.)} \\ = \frac{1}{2} AC \times GS = ASC. \text{ Or,}$$

PART. I. Les Fig. 37. 39. donnent $ASD = ASB + BAD + BSD$, & les Fig. 38. 39. donnent $ASD = ASB + BAD - BSD$. Donc (*prep. nomb. 1. 2.*) ce cas du point *S* dans le complément *BAF* de l'angle capital *BAC*, comme on le voit dans les Fig. 37. 38. 39. donnera toujours $ASD = ASB + ASC$. Ce qu'il falloit 1° . démontrer. Fig. 37. 38. 39.

PART. II. Les Fig. 40. 42. donnent $ASD = BAD + BSD - ASB$, les Fig. 41. 42. donnent $ASD = BAD - BSD - ASB$, & la Fig. 43. donne $ASD = BSD - BAD - ASB$. Donc (*prep. nomb. 1. 2. 3.*) ce cas du point *S* dans un des angles oppozés *DAB*, *KAE*, comme on le voit dans les Fig. 40. 41. 42. 43.

Fig. 40. 41. 42. 43. donnera toujours $ASD = ASC - ASB$. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

On trouveroit de même $ASD = ASB - ASC$, si S étoit dans un des angles oppoſez DAC, KAF.

FIG. 44. PART. III. La Fig. 44. donne $ASD = BAD + BSD$, la Fig. 45. donne $ASD = BAD - BSD$, & la Fig. 46. donne $ASD = BSD - BAD$. Donc (prep. nom. 1. 2. 3.) ce cas du point S ſur le côté AB prolongé de l'angle capital BAC, comme on le voit dans les Fig. 44. 45. 46. donnera toujours $ASD = ASC$. Ce qu'il falloit 3°. démontrer.

On trouveroit de même $ASD = ASB$, ſi le point S étoit quelque part ſur l'autre côté AC prolongé.

FIG. 47. PART. IV. La Fig. 47. donne $ASB = BAD + BSD$; la Fig. 48. donne $ASB = BAD - BSD$, & la Fig. 49. donne $ASB = BSD - BAD$. Donc (prep. nomb. 1. 2. 3.) ce cas du point S placé quelque part ſur la diagonale AD prolongée, comme on le voit dans les Fig. 47. 48. 49. donnera toujours $ASB = ASC$. Ce qu'il falloit 4°. démontrer.

COROLLAIRE I.

FIG. 37. Si preſentement du point S on mene SM, SN, per-
& ſuivantes
juſqu'à 48. pendiculaires en M, N, ſur AB, AD, prolongées, ſ'il eſt
neceſſaire, comme SG eſt (conſtr.) perpendiculaire en G
ſur AC prolongée; l'on aura les aires triangulaires ASD
 $= \frac{1}{2} AD \times SN$, $ASB = \frac{1}{2} AB \times SM$, & $ASC = \frac{1}{2} AC \times SG$. Or,

FIG. 37. 1°. La Part. 1. donne $ASD = ASB + ASC$ dans les Fig.
38. 39. qui ont le point S dans le complement BAF
de l'angle capital BAC. Donc en ce cas on aura toujours
 $\frac{1}{2} AD \times SN = \frac{1}{2} AB \times SM + \frac{1}{2} AC \times SG$, ou $AD \times SN = AB \times$
 $SM + AC \times SG$.

On trouveroit la même choſe, de la même maniere, ſi S étoit dans l'autre complement CAE de l'angle capital BAC.

FIG. 40. 2°. La Part. 2. donne $ASD = ASC - ASB$ dans les Fig.
41. 42. 43. qui ont le point S dans un des angles
oppoſez DAB, KAE. Donc en ce cas on aura toujours

$$\frac{1}{2}AD \times SN = \frac{1}{2}AC \times SG - \frac{1}{2}AB \times SM, \text{ ou } AD \times SN = AC \times SG - AB \times SM.$$

On trouveroit de même $AD \times SN = AB \times SM - AC \times SG$, si le point S étoit dans un des angles oppoſez DAC, KAF.

3°. La Part. 3. donne $ASD = ASC$ dans les Fig. 44. 45. 46. qui ont le point S ſur le côté AB prolongé ou non, de l'angle capital BAC. Donc en ce cas on aura toujours

$$\frac{1}{2}AD \times SN = \frac{1}{2}AC \times SG, \text{ ou } AD \times SN = AC \times SG.$$

4°. La Part. 4. donne $ASB = ASC$ dans les Fig. 47. 48. 49. qui ont le point S ſur la diagonale AD prolongée ou non. Donc en ce cas on aura toujours $\frac{1}{2}AB \times SM = \frac{1}{2}AC \times SG$, ou $AB \times SM = AC \times SG$.

COROLLAIRE II.

Puiſque (*Corol. I. nomb. 3.*) $AD \times SN = AC \times SG$ dans le cas du point S pris ou donné ſur le côté AB prolongé ou non, de l'angle capital BAC, comme dans les Fig. 44. 45. 46. & que (*Corol. I. nomb. 4.*) $AB \times SM = AC \times SG$ dans le cas de ce point S pris ſur la diagonale AD prolongée ou non, du parallelogramme quelconque ABDC, menée par cet angle capital BAC, comme dans les Fig. 47. 48. 49. On voit que dans le premier de ces deux cas on aura toujours $SG. SN :: AD. AC$. Et dans le ſecond, $SG. SM :: AB. AC$. D'où l'on voit en general que ſi d'un point S, pris ou donné à volonté ſur un des côtés AB, AC, ou ſur la diagonale AD (qui paſſe par leur angle BAC) d'un parallelogramme quelconque ABDC, on mene deux perpendiculaires ſur les deux autres de ces trois lignes prolongées ou non; ces deux perpendiculaires ſeront toujours entr'elles en raiſon reciproque des deux côtés, ou d'un d'eux, & de la diagonale du parallelogramme propoſé quelconque, ſur leſquels ces deux perpendiculaires ſont à angles droits.

C'est ce qu'on a déjà vû autrement démontré dans le Corol. 10. du Lemme 8.

SCHOLIE.

FIG. 39.
42. & sui-
vantes jus-
qu'à 49.

Ce n'a été que pour démontrer par la même méthode tous les cas du présent Lem. 16. qu'on a employé dans tous la perpendiculaire SG au côté AC de l'angle capital BAC ; car on peut aisément s'en passer dans les cas des Fig. 39. 42. 44. 45. 46. 47. 48. 49. & même la démonstration en sera plus simple que par cette voye generale. En effet,

FIG. 39.
42.

1°. Dans les Fig. 39. 42. les triangles ASC, BAD, de bases égales AC, BD, & compris entre ces mêmes paralleles, étant ainsi égaux entr'eux, l'on aura tout d'un coup $ASD = ASB + BAD = ASB + ASC$ dans la Fig. 39. & $ASD = BAD - ASB = ASC - ASB$ dans la Fig. 42. le tout conformément à ce qu'on a trouvé de l'autre maniere pour ces deux Fig. 39. 42. dans les démonstrations des Part. 1. 2.

FIG. 44.
45. 46.

2°. Dans les Fig. 44. 45. 46. les triangles ASD, ASC, étant sur mêmes bases AS, & entre mêmes paralleles AS, CD ; on voit encore plus promptement que ces deux triangles sont égaux entr'eux, conformément à ce qu'on en a trouvé dans la démonstration de la Part. 3.

FIG. 47.
48. 49.

3°. Dans les Fig. 47. 48. 49. les triangles égaux ABD, ACD, ayant des hauteurs égales sur leur base commune AD, & ces hauteurs étant aussi celles des triangles ABS, ACS, sur leur base commune AS : ces deux derniers triangles seront aussi égaux entr'eux, conformément à ce qu'on en a trouvé pour ces trois Fig. 47. 48. 49. dans la démonstration de la Part. 4.

LEMME XVII.

FIG. 50. 51.

Si plus de deux puissances B, C, D, E, F, G, &c. sont appliquées à autant de cordons attachez ensemble par un seul & même nœud commun A, que rien autre chose ne retient, l'équilibre est impossible entre ces puissances (quelles qu'elles soient,

soient, & quel qu'en soit le nombre) lorsqu'elles sont dirigées de manière qu'un plan RS puisse passer par ce nœud commun A de leurs cordons, sans passer entr'elles ou entr'eux, ou sans qu'elles soient toutes dans ce plan, c'est-à-dire, sans diviser aucun des angles que ces cordons font entr'eux, & sans qu'ils soient tous dans ce même plan.

DEMONSTRATION.

Il est visible qu'un plan RP , qui rencontreroit ainsi en Fig. 50.
 A tous les cordons des puissances supposées auroit toutes 51.
 ces puissances tirantes d'un seul côté par rapport à lui, comme dans la Fig. 50. ou quelques-unes tirantes vers ce seul côté-là, pendant que toutes les autres tireroient suivant ce plan comme dans la Fig. 51. Donc de quelque manière que l'on combine toutes ces puissances, il ne résultera du concours de toutes qu'une impression totale vers le côté où il y aura des puissances hors le plan supposé. Donc il ne pourra y avoir alors d'équilibre entre toutes ces puissances, auxquelles rien d'ailleurs (*Hyp.*) ne s'oppose. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc quelques soient les directions de plus de deux cordons (en quelque nombre qu'ils soient) attachez ensemble par un seul & même nœud, & quelques puissances qu'on leur applique, une à chacun, l'équilibre sera impossible entre ces puissances.

1°. Dans le cas de tous les cordons en même plan, si le prolongement de quelqu'un d'eux ne divise pas quelqu'un des angles que les autres cordons font entr'eux; puisqu'un autre plan que le leur, mené suivant ce cordon-là, les rencontreroit alors tous en leur nœud commun sans passer entr'eux, & sans qu'ils fussent tous dans ce plan.

2°. Dans le cas des mêmes cordons en plans differens, si quelqu'un de ces plans prolongé ne passe pas à travers des cordons des autres plans; puisque celui-là sera

lui-même un plan qui rencontrera tous ces cordons en leur nœud commun sans passer entr'eux.

COROLLAIRE II.

Il suit encore de ce Lemme-ci, que quelques soient les directions de plus de deux cordons (en quelque nombre qu'ils soient encore) attachez ensemble par un seul & même nœud, qui soit regardé comme le centre d'un cercle, ou d'une sphere; que si ces cordons ne sont pas répandus en plus d'une demi-sphere, lorsqu'ils sont en plans differens, & en plus d'un demi-cercle, s'ils sont en même plan; quelques puissances qu'on leur applique, une à chacun, elles ne pourront jamais être en équilibre entr'elles suivant ces directions; puisqu'on pourra faire passer un plan par le nœud commun, sans qu'il passe entre ces cordons, & sans qu'ils soient tous dans ce plan.

LEMME XVIII.

I. Lorsque tous les cordons issus d'un même nœud, sont dirigés suivant un même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle, il n'y en a aucun qui prolongé par de-là ce nœud commun, ne passe entre les autres cordons, c'est-à-dire, à travers quelqu'un de leurs angles.

DEMONSTRATION.

Car s'il n'y passoit pas, il feroit le diametre terminant d'un demi-cercle, dans lequel seul lui & les autres cordons seroient alors tous répandus; ce qui est contre l'hypothese. Donc, &c.

II. Dans la même hypothese de tous les cordons dirigés suivant un même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle; quelque ligne droite qu'on mène ou qu'on imagine sur ce plan par le nœud commun, sans passer par aucun d'eux; elle passera toujours de part & d'autre du nœud à travers deux des angles que ces cordons font entr'eux.

DEMONSTRATION.

Car si elle ne passoit à travers aucun de ces angles, elle seroit le diametre terminant d'un demi-cercle dans lequel tous ces cordons seroient ; ce qui est contre l'hypothese ; & si cette ligne droite ne passoit à travers que d'un des angles de ces cordons , les deux cordons voisins à droite & à gauche de cette ligne droite du côté qu'elle ne passeroit à travers aucun de leurs angles, seroient avec tous les autres dans un demi-cercle , ou en moins d'un demi-cercle ; ce qui est encore contre l'hypothese. Donc, &c.

III. *Lorsque ces cordons sont dirigez suivant des plans differens, & répandus en plus d'une demi-sphere, il n'y a aucun de ces plans qui prolongé ne passe entre les cordons des autres plans.*

DEMONSTRATION.

Car s'il n'y passoit pas , il seroit le plan d'un grand cercle terminant une demi-sphere, dans laquelle tous les cordons seroient répandus ; ce qui est contre l'hypothese. Donc, &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AVERTISSEMENT.

I. L'usage des Lemmes précédens se verra dans les Sections suivantes , dans lesquelles (pour la commodité des citations) les Définitions, quoique de Sections différentes, seront numerotées par des chiffres de suite depuis la premiere des précédentes , jusqu'à la dernière de ce Traité-ci. Il en fera de même des Théoremes entr'eux, & des Problèmes aussi entr'eux.

II. Les parallelogrammes qui nous vont servir à appliquer aux Machines le précédent principe general, & qui par le moyen des rapports de leurs côtes entr'eux, & à leurs diagonales, nous serviront à trouver ceux que des puissances en équilibre sur ces Machines , doivent avoir entr'elles, & à la charge qui en doit résulter à ces

Machines : ces parallelogrammes, di-je, ayant (*Lem. 8. Corol. 2. 3.*) leurs côtez & leurs diagonales en raison des sinus des angles qui leur sont opposez, nous exprimerons aussi ces rapports de puissances & de charges des Machines par ceux de ces sinus, dont nous nous servirons souvent, sans même faire mention des parallelogrammes, que pour arriver à ces sinus, tant pour la simplicité des Figures & des Démonstrations, que parce que le calcul dans les Machines est beaucoup plus facile & plus expeditif par les sinus que par les côtez & diagonales des parallelogrammes, dont on ne connoît presque jamais les rapports que par le moyen de ceux de ces sinus, qui pour cela seront, di-je, souvent substituées dans la suite à ces côtez & à ces diagonales de parallelogrammes, sans en faire quelquefois aucune mention. Cependant si l'on veut restituer les parallelogrammes aux endroits où nous n'employons que des sinus, sans faire aucune mention de ces Figures, la chose sera aisée ; par exemple, dans les Figures 16. 17. si l'on veut avoir en diagonale & en côtez d'un parallelogramme, les rapports qui ne seroient exprimez qu'en sinus d'angles BDC, ADC, ADB, il n'y a qu'à faire un parallelogramme ABCD d'une diagonale quelconque AD prise sur la ligne qui divise à volonté l'angle total BDC en deux autres partiels ADC, ADB, & qui ait ses côtez AB, AC, sur ceux de cet angle total BDC, & alors on aura (*Lem. 8. Corol. 4.*) la diagonale AD, & les côtez AB, AC, de ce parallelogramme ABDC, en raison des sinus des angles proposez BDC, ADC, ADB ; auxquels sinus on pourra consequemment substituer cette diagonale & ces côtez de parallelogramme pour exprimer par leurs rapports ceux qui ne l'étoient que par les rapports de ces sinus.

FIG. 16.
17.

Fig. 1.

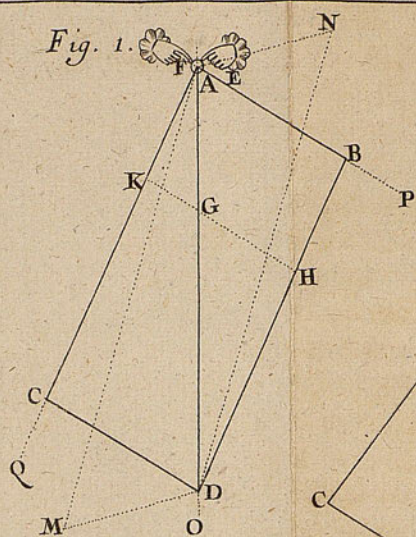


Fig. 2.

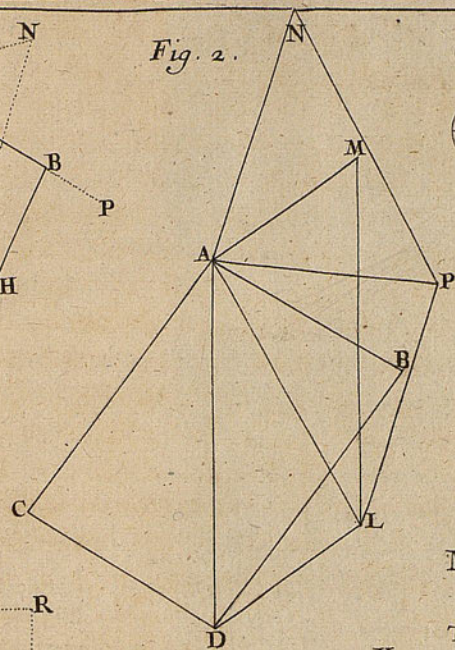


Fig. 3.

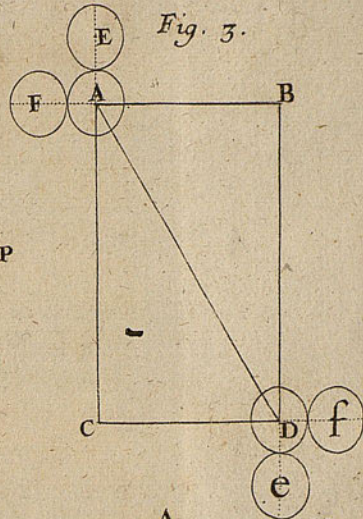


Fig. 4.

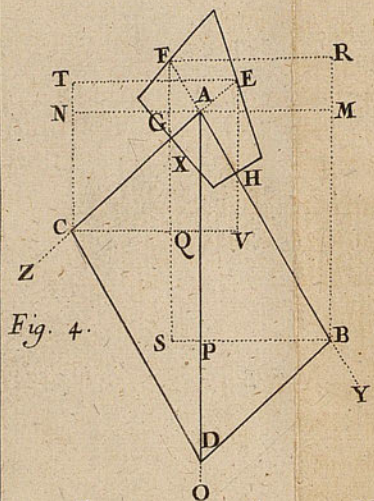


Fig. 5.

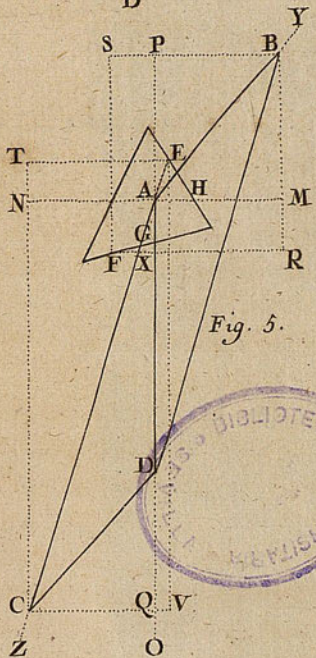


Fig. 6.

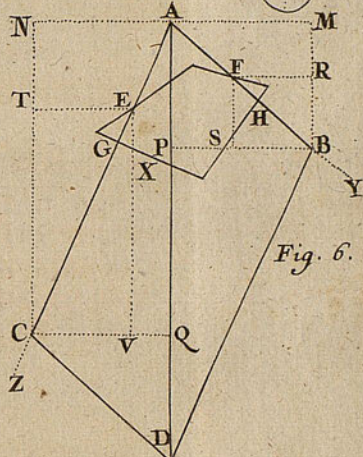


Fig. 7.

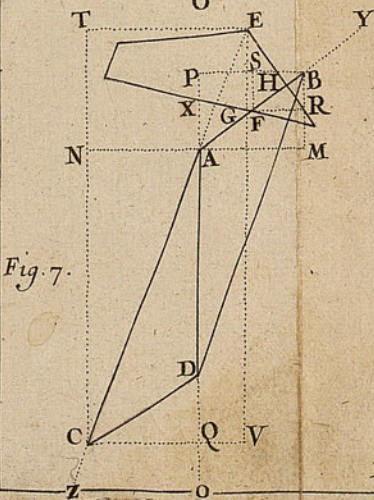


Fig. 8.

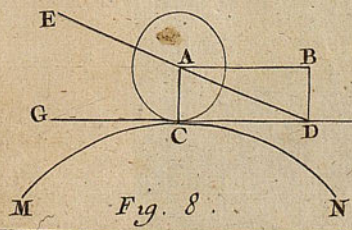
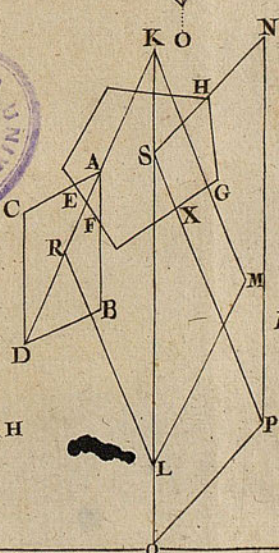
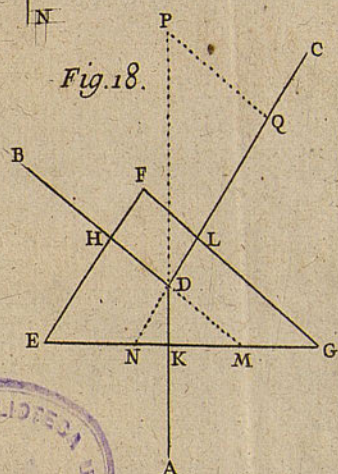
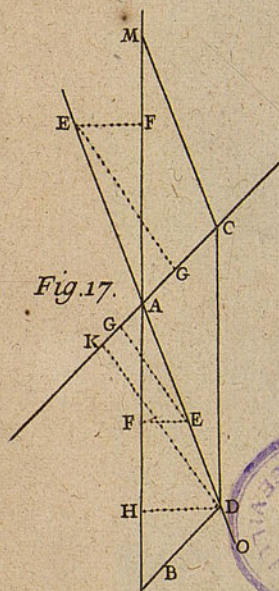
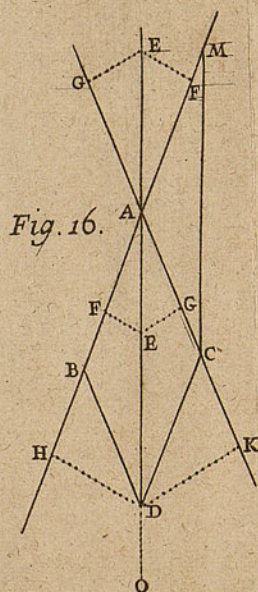
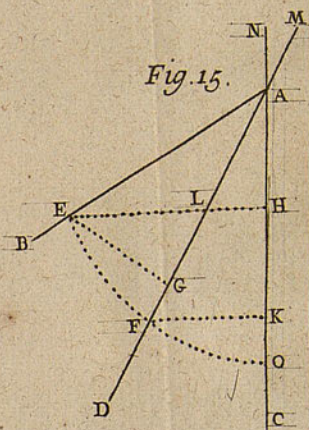
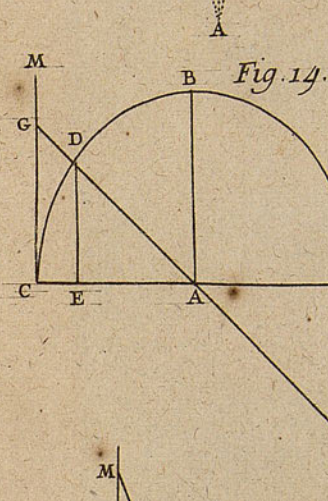
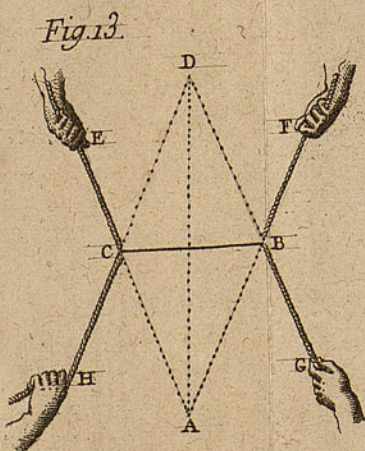
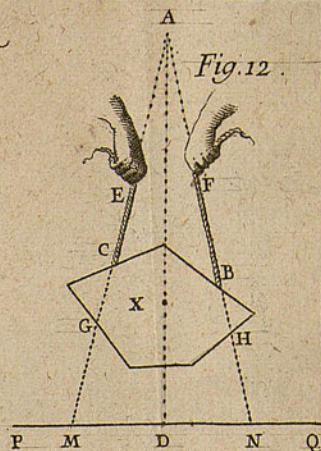
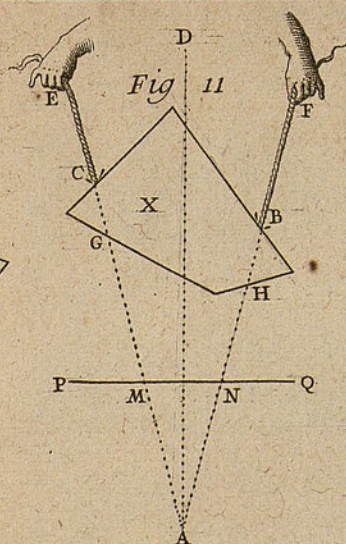
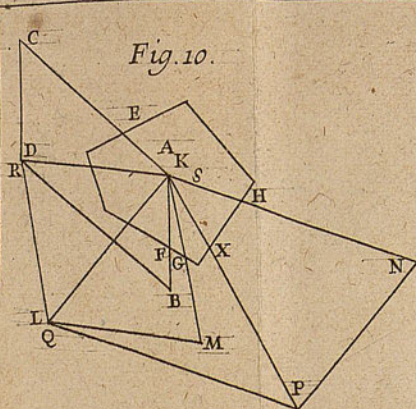


Fig. 9.





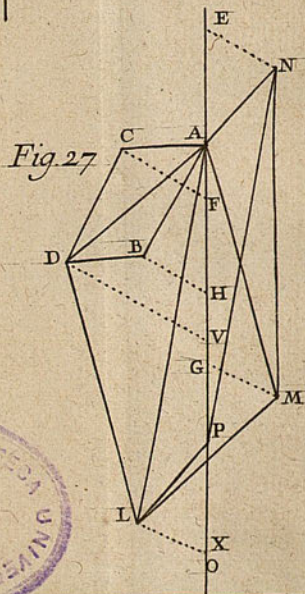
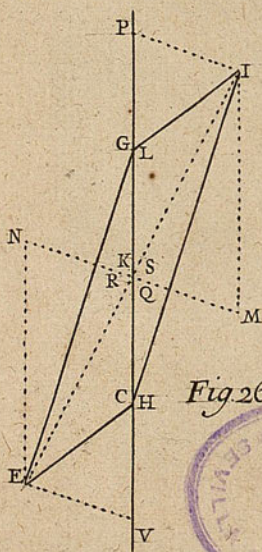
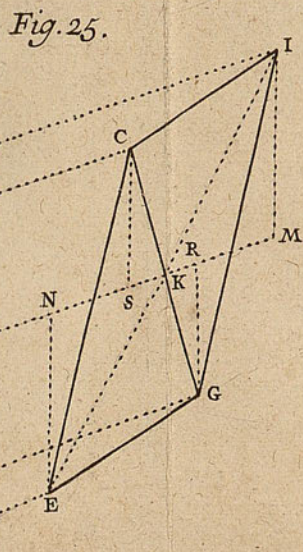
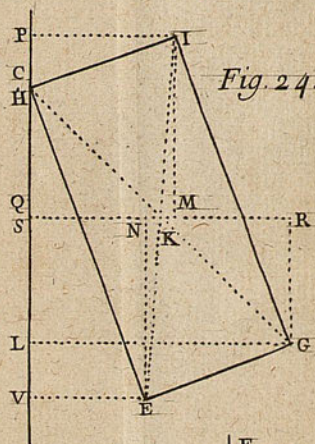
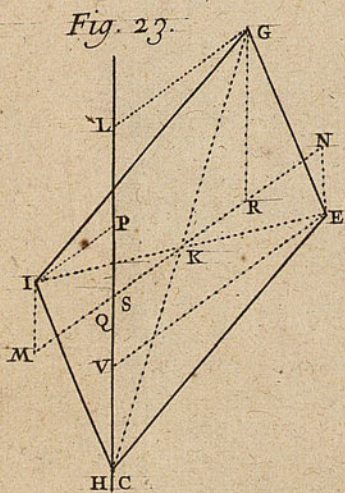
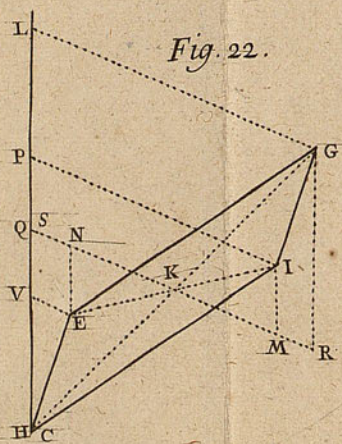
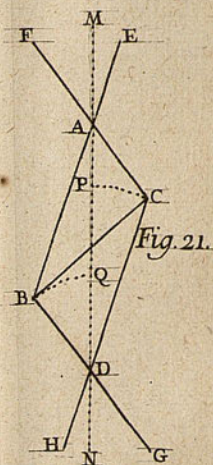
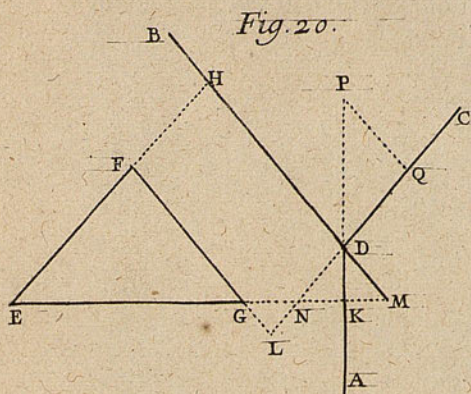
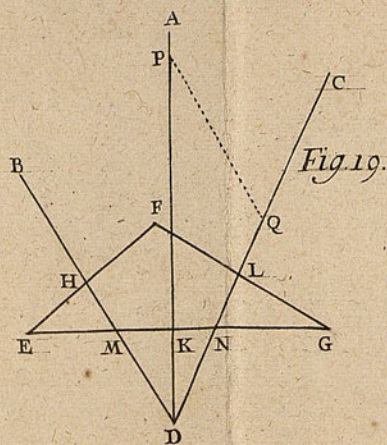


Fig. 28.

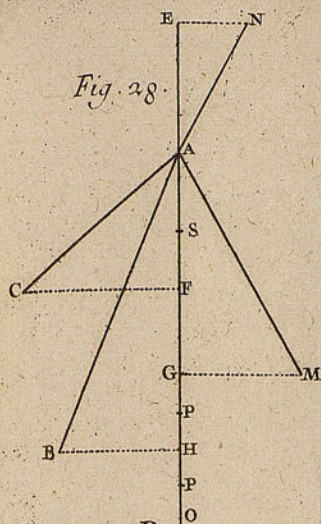


Fig. 29.

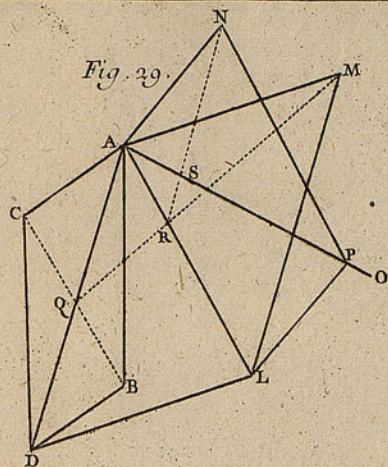


Fig. 30.

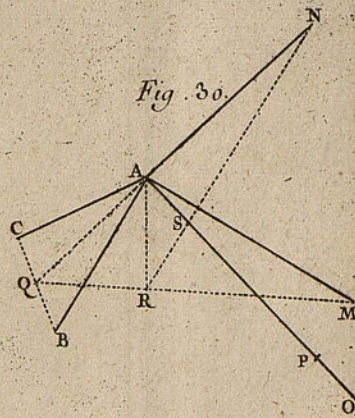


Fig. 32.

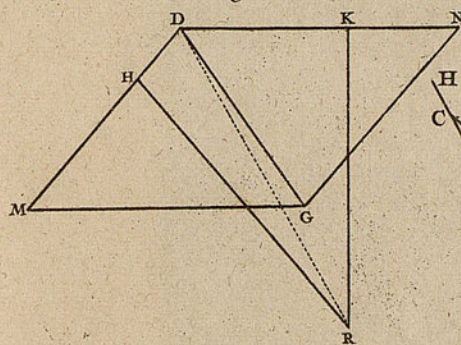


Fig. 33.

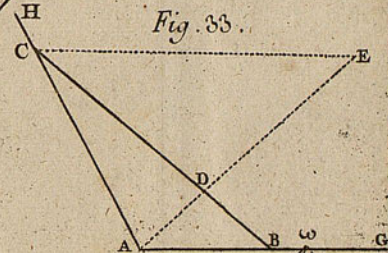


Fig. 34.

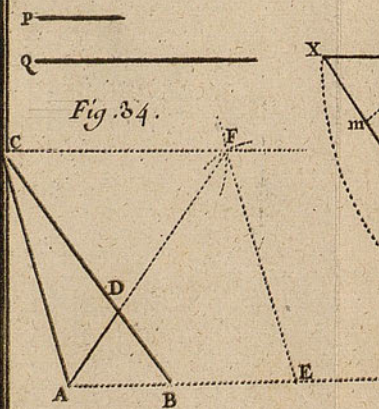


Fig. 35.

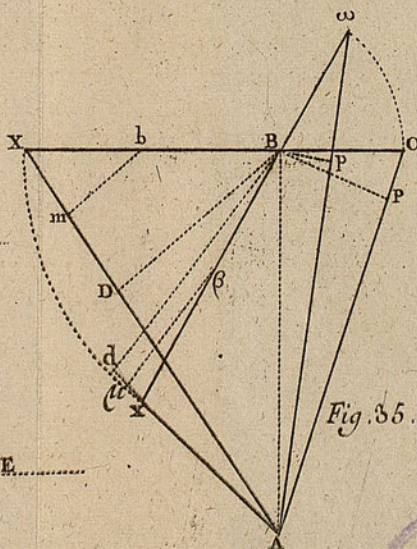


Fig. 36.

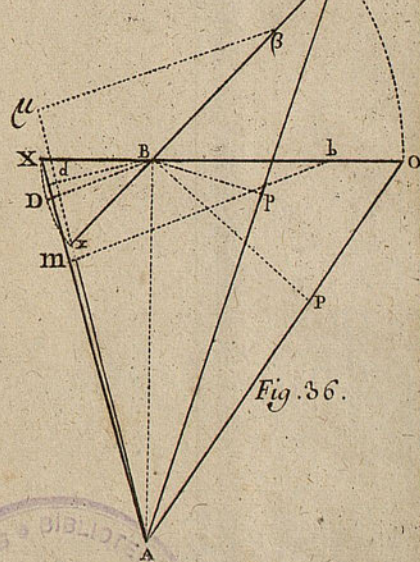


Fig . 37 .

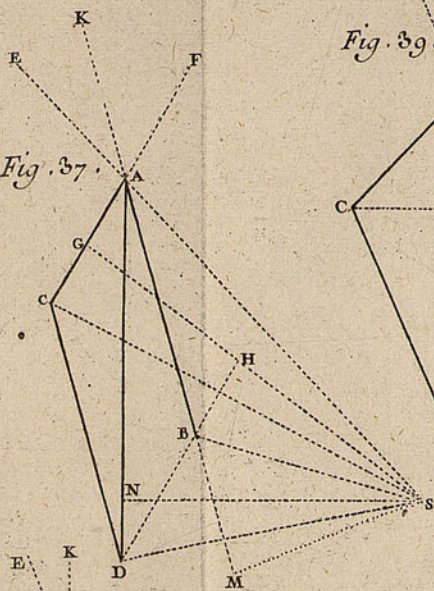


Fig . 39 .

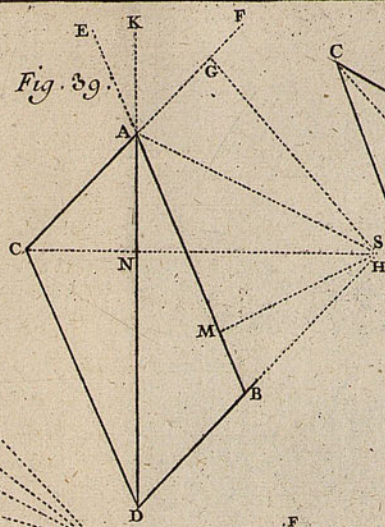


Fig . 38 .

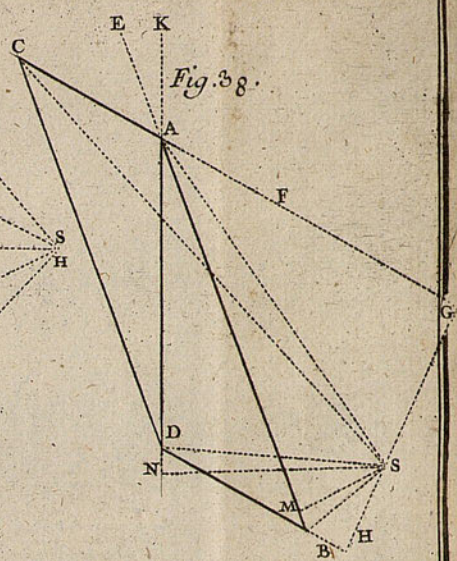


Fig . 40 .

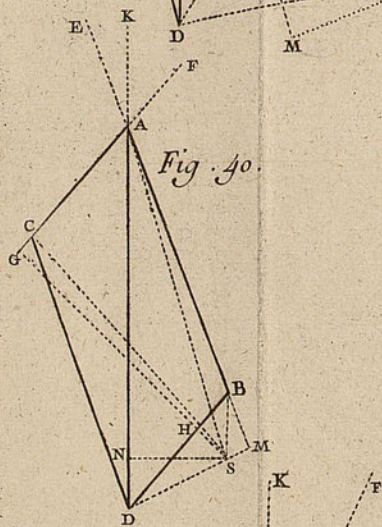


Fig . 41 .

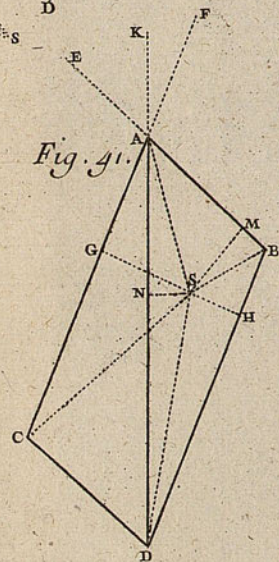


Fig . 42 .

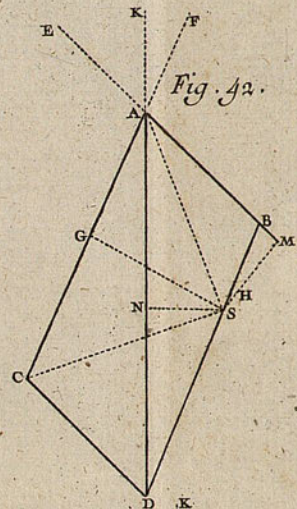


Fig . 43 .

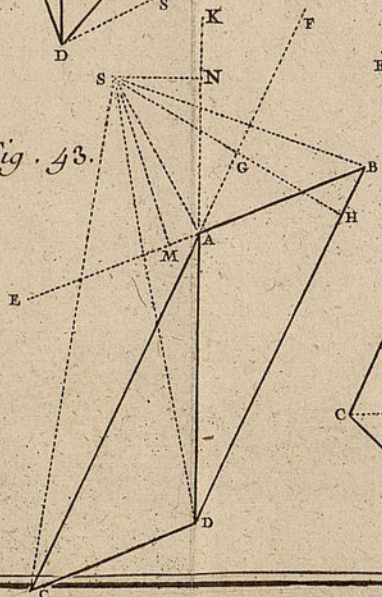


Fig . 44 .

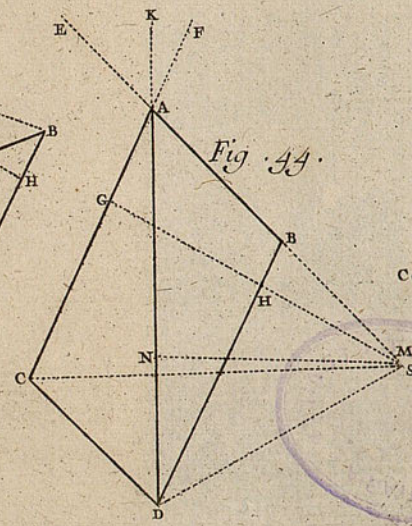
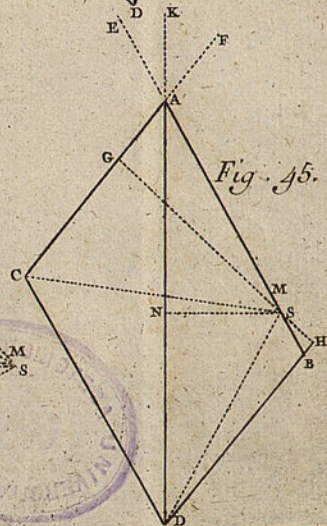


Fig . 45 .



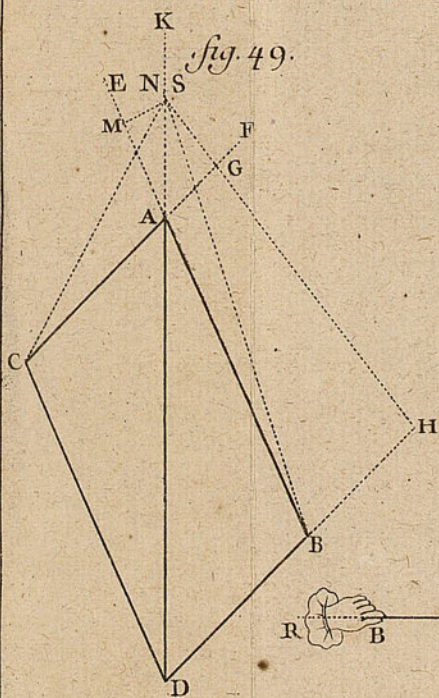
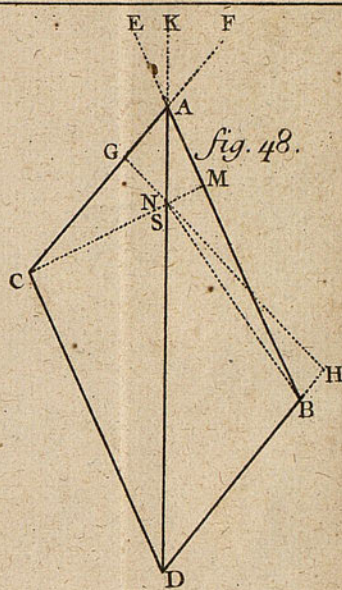
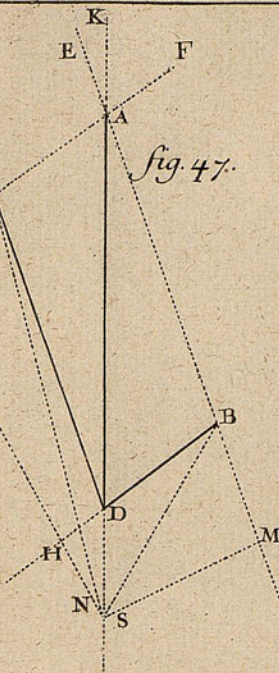
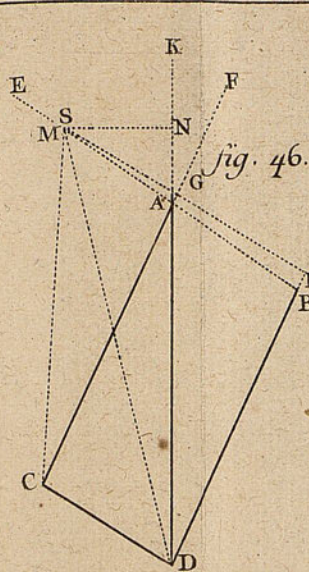


fig. 50.

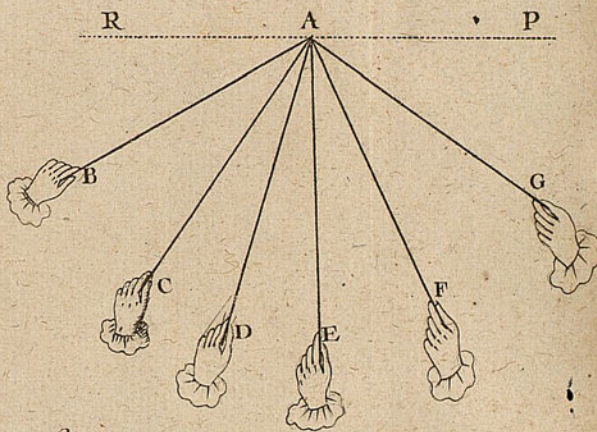
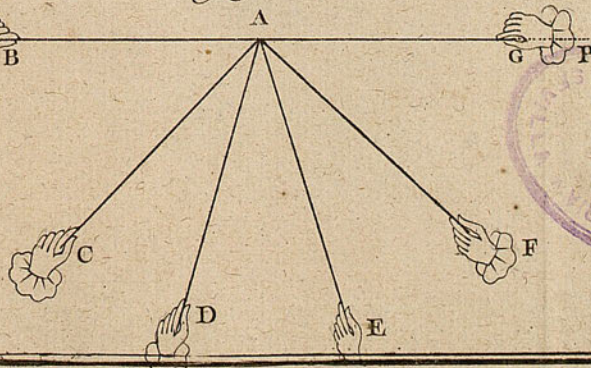


fig. 51.





SECTION II.

Des Poids soutenus avec des cordes seulement, en quelque nombre qu'elles soient, & pour tous les angles possibles qu'elles peuvent faire entr'elles.

DEFINITION XV.

LE poids K étant soutenu avec des cordes seulement, FIG. 92.
53. 54. 55.
56. en quelque nombre, & suivant quelques directions qu'elles soient, par les puissances P, R, &c. les parties AB, AC, &c. de ces directions ou cordes prolongées, prises depuis le point A de leur concours, en raison des puissances P, R, &c. appliquées à ces cordes, seront dans la suite simplement appelées *proportionnelles* de ces puissances.

DEFINITION XVI.

Les parties AF, AE, &c. de la direction prolongée XK du poids K, comprises entre les concours A des cordes PG, RH, &c. aussi prolongées (par où l'on va voir que cette direction du poids K doit toujours passer) & les perpendiculaires BE, CF, &c. à cette direction XK, menées des autres extrêmités, B, C, &c. des proportionnelles AB, AC, &c. des puissances P, R, &c. seront appelées les *sublimatez* de ces puissances, lorsque ces parties AE, AF, &c. de la direction du poids K seront au dessus du poids A; & lorsque ces parties AE, AF, &c. seront au dessous de ce point A, elles seront appelées les *profondeurs* de ces mêmes puissances P, R, &c. Ce qui fera aussi appeler ces puissances *sublimes* ou *profondes*, selon qu'elles seront au dessus ou dessous de ce concours A de leurs directions; c'est-à-dire, selon qu'elles agiront de bas en haut, ou de haut en bas. Suivant ce langage AE, AF,

seront autant de sublimitez, & P, R, autant de puissances sublimes dans les Fig. 52. 55. 56. mais dans la Fig. 54. il n'y aura que AE, & P, qui le soient : AF y sera une profondeur, & R une puissance profonde. Dans la Fig. 53. il n'y aura non plus que AF de sublimitez, & R de puissances sublimes ; & cela sans aucune profondeur, la direction de la puissance P, qui y est (Hyp.) perpendiculaire à celle AX du poids K, y rendant AE nulle ou zero.

THEOREME I.

Fondamental de la presente Section II.

Fig. 52.
53. 54. 55.
56.

I. Lorsqu'un poids quelconque K de pesanteur dirigée suivant KX, est soutenu seulement avec des cordes GP, HR, par deux puissances P, R, en équilibre avec lui ; les directions KX, PG, RH, de ces poids & de ces deux puissances seront toujours en même plan ; toutes trois passeront par un même point A, ou seront paralleles entr'elles, & de maniere que la direction XK prolongée du poids, passera toujours entre les deux autres PC, RH.

II. Du concours des puissances P, R, il resultera une force qui en ce cas d'équilibre sera toujours égale au poids K, & d'une direction en ligne droite avec celle KX de ce poids.

III. Si sur cette direction XK prolongée, que la démonstration de la part. I. va faire voir passer toujours (en ce cas d'équilibre) par A à travers l'angle PAR des cordes PG, RH, aussi prolongées ; on prend dans cet angle (quel qu'il soit) depuis son sommet A, une partie quelconque AD, sur laquelle comme diagonale, on fasse un parallelogramme ABDC, qui ait pour côtez des parties AB, AC, des directions des cordes PG, RH, ou des puissances P, R, appliquées à ces cordes : le poids K sera toujours à chacune de ces puissances P, R, supposées en équilibre avec lui, comme la diagonale AD de ce parallelogramme ABDC, sera à chacun de ses côtez AB, AC, qui leur répondent sur leurs directions.

IV. En ce même cas d'équilibre, si les puissances P, R, sont entr'elles comme les parties quelconques AB, AC, de

leurs directions, ou (ce qui revient au même) si du concours A de leurs directions on en prend des parties AB, AC , qui soient entr'elles comme ces deux puissances P, R , & que de ces deux côtéz AB, AC , on fasse un parallélogramme $ABDC$; sa diagonale AD sera toujours en ligne droite avec la direction KX du poids K ; & ce poids K sera encore alors à chacune de ces deux puissances P, R , comme cette diagonale AD du parallélogramme $ABDC$ à chacun de ses côtéz AB, AC , correspondans sur leurs directions.

V. Reciproquement si la direction KX du poids K , prolongée vers D , passe le long du plan, par le concours A , & à travers l'angle PAR des cordes PG, HR , prolongées, auxquelles les puissances P, R sont appliquées; & que ce poids soit à chacune de ces deux puissances comme la diagonale AD du parallélogramme $ABDC$, fait comme dans la part. 3. sera à chacun de ses côtéz AB, AC , qui leur répondent sur leurs directions; ce poids K sera pour lors en équilibre avec ces deux puissances P, R .

VI. Reciproquement encore si la direction KX du poids K se trouve en ligne droite avec la diagonale AD du parallélogramme $ABDC$, fait comme dans la part. 4. & que ce poids soit à chacune des deux puissances P, R , comme cette diagonale AD sera à chacun des côtéz AB, AC , qui leur répondent sur leurs directions dans ce parallélogramme $ABDC$; ce poids K sera pour lors en équilibre avec ces deux puissances P, R .

DEMONSTRATION.

PART. I. Le Corol. 15. du Lem. 3. fait voir que dans l'équilibre ici supposé, la direction KX du poids K doit toujours passer le long du plan de celles PG, RH , des puissances P, R , par leur point de concours A , à travers l'angle PAR qu'elles font entr'elles; & les Corol. 2. 3. du Lem. 6. font voir que lorsque cet angle sera infiniment aigu par l'éloignement infini de son sommet A , ces trois directions KX, PG, RH , seront parallèles entr'elles dans le même plan, & dans le même ordre qu'au-

paravant. Donc en ce cas d'équilibre ces directions seront toutes trois en même plan, par un même point, ou parallèles entr'elles; & celle KX du poids K sera toujours entre les deux autres PG, RH. *Ce qu'il falloit 1^o démontrer.*

PART. II. Le nomb. 1. du Corol. 1. du Lemme 3. fait voir que du concours des puissances P, R, il doit résulter au point A, & conséquemment aussi au corps K une force nouvelle suivant quelque ligne AD qui passe par A à travers l'angle PAR compris entre les directions de ces deux puissances, suivant laquelle ligne AD ce corps seroit tiré par le concours de ces deux puissances, de même que si au lieu de l'être par elles ensemble, il ne l'étoit en même sens suivant cette ligne AD, que par une puissance égale à la force résultante du concours de ces deux-là; & que ce corps ainsi tiré se mouvroit effectivement (Ax. 2.) suivant cette ligne de A vers D, si quelqu'autre force ou résistance ne s'y opposoit. Donc n'y ayant ici (Hyp.) que la pesanteur de ce poids K qui s'y oppose, non seulement cette direction AD de la force résultante du concours des deux puissances P, R, dans l'équilibre ici supposé, doit être (Lem. 3. Corol. 2. nomb. 1.) en ligne droite avec la direction KX du poids K, ou de sa pesanteur; mais encore cette force doit (Lem. 3. Corol. 2. nomb. 3.) être égale à cette pesanteur; c'est-à-dire (Lem. 3. Corol. 2.) être égale & directement opposée à cette même pesanteur. *Ce qu'il falloit 2^o démontrer.*

PART. III. Puisque le poids K est (Hyp.) soutenu par le concours des puissances P, R, &c. en équilibre avec elles, les nomb. 1. 2. 3. du Corol. 2. du Lem. 3. font voir que sa pesanteur doit être égale à la force résultante (Lem. 3. Corol. 1. nomb. 1.) de leur concours d'action contre lui, & être dirigée suivant la même ligne que cette force en sens directement contraire: de sorte que la pesanteur de ce poids étant (part. 1.) dirigée suivant DA, la force résultante du concours d'action des puissances P, R, contre lui, sera aussi dirigée suivant la même

me diagonale AD du parallelogramme ABDC. Par consequent cette force ou impression resultante du concours de ces deux puissances P, R, fera non seulement égale & directement opposée à la pesanteur du poids K, mais encore (*Lem. 3. Corol. 5.*) elle sera à chacune de ces mêmes puissances P, R, comme la diagonale AD du parallelogramme ABDC est à chacun de ses côtez AB, AC, qui leur répondent sur leurs directions. Donc aussi le poids K ou sa pesanteur fera de même ici à chacune de ces deux puissances P, R, comme cette diagonale AD est à chacun des côtez AB, AC, qui leur répondent dans le parallelogramme ABDC. *Ce qu'il falloit 3°. démontrer.*

PART. IV. Puisque (*Hyp.*) $P.R.::AB.AC$. la direction de la force résultante du concours de ces deux puissances P, R, doit être (*Lem. 3. Corol. 1. nomb. 1.*) de A vers D suivant la diagonale AD du parallelogramme ABDC. Or dans le cas d'équilibre ici supposé, cette direction doit être (*part. 1.*) en ligne droite avec celle KX du poids K. Donc en ce cas d'équilibre la diagonale AD doit être sur cette direction XK prolongée du côté de K; & conséquemment (*part. 3.*) le poids K doit être ici à chacune des puissances P, R, supposées en équilibre avec lui, comme la diagonale AD du parallelogramme ABDC est à chacun de ses côtez AB, AC, correspondans sur leurs directions. *Ce qu'il falloit 4°. démontrer.*

PART. V. Puisque (*Hyp.*) le poids K est à chacune des puissances P, R, comme la diagonale AD du parallelogramme ABDC, prise sur la direction XK prolongée de ce poids, est à chacun de ses côtez AB, AC, pris aussi sur les directions prolongées AP, AR, de ces deux puissances, par le concours, & dans le plan desquelles directions passe (*Hyp.*) celle du poids K à travers leur angle PAR; l'on aura ici $P.K::AB.AD$. Et $K.R::AD.AC$. Donc (en raison ordonnée) $P.R::AB.AC$. Par consequent (*Lem. 3. Corol. 1. nomb. 1. 2.*) les puissances P, R, doivent tirer le poids K de A vers D suivant AD direction

(*Hyp.*) prolongée KX de ce poids dans le plan de leurs cordes, & d'une force contraire à la sienne, laquelle force contraire soit à chacune de ces deux puissances P, R , comme cette diagonale AD du parallélogramme $ABDC$ est à chacun de ses côtes AB, AC , qui leur répondent. Mais la force de ce poids ou sa pesanteur est aussi (*Hyp.*) en cette même raison à chacune de ces deux puissances. Donc la pesanteur de ce poids K est ici directement contraire & égale à la force résultante du concours d'action des puissances P, R , contre lui. Par conséquent (*Ax. 3. & Corol. 1. du princ. gener.*) ce poids doit ici demeurer en équilibre avec ses deux puissances. *Ce qu'il falloit 5°. démontrer.*

Autrement. Si le poids K ne faisoit pas ainsi équilibre avec les puissances P, R , soit en sa place tel autre poids Z qu'on voudra, qui appliqué suivant sa direction Ax contre les puissances P, R , dirigées comme ci-dessus, fasse équilibre avec elles. La part. 3. fait voir que ce nouveau poids Z seroit alors à chacune de ces puissances P, R , comme la diagonale AD du parallélogramme $ABDC$ est à chacun de ses côtes correspondans AB, AC , sur leurs directions, c'est-à-dire (*Hyp.*) comme le poids K est à chacune de ces deux mêmes puissances P, R ; & par conséquent que ce poids K seroit égal à l'autre Z substitué en sa place suivant sa direction. Donc (*Ax. 2.*) ce poids K seroit pareillement équilibre ici avec les deux mêmes puissances P, R . *Ce qu'il falloit encore 5°. démontrer.*

PART. VI. Puisque les côtes AB, AC , du parallélogramme $ABDC$, sont ici (*Hyp.*) entr'eux comme les puissances P, R , sur les directions desquelles ils se trouvent, la force résultante du concours de ces deux puissances sera ici (*Lem. 3. Corol. 5.*) de A vers D suivant AD , & à chacune d'elles comme la diagonale AD de ce parallélogramme BC , est à chacun de ses côtes AB, AC , correspondans sur les directions de ces deux puissances P, R , c'est-à-dire (*Hyp.*) comme le poids K est à chacune

d'elles ; & conséquemment ce poids K fera ici égal à cette force résultante du concours d'action de ces deux puissances P, R, contre lui. Donc la direction de cette force venant d'être trouvée de A vers D suivant AD, & celle du poids K étant (*Hyp.*) de D vers A suivant la même DA ; ce poids & cette force, c'est-à-dire, ce poids & les deux puissances P, R, du concours desquelles cette force résulte, demeureront ici (*Ax. 3. & Corol. 1. du princ. gener.*) en équilibre entr'eux. *Ce qu'il falloit 6°. démontrer.*

C O R O L L A I R E I.

En cas d'équilibre la part. 3. de ce Théoreme-ci donnant $P.K :: AB. AD.$ Et $K.R :: AD. AC.$ l'on aura ici (en raison ordonnée) $P.R :: AB. AC.$ comme dans la part. 4. c'est-à-dire, les puissances P, R, entr'elles en raison des côtes AB, AC, qui leur répondent sur leurs directions dans le parallélogramme ABDC. Par conséquent si d'un point quelconque L de la diagonale AD prolongée, on mène LM, LN, perpendiculaires sur les directions AP, AR, de ces deux puissances P, R ; ces mêmes puissances seront aussi entr'elles (*Lem. 8.*) en raison reciproque de ces perpendiculaires : c'est-à-dire, $P.R :: LN. LM.$ Ce qui donnant $P \times LM = R \times LN$, on voit qu'en cas d'équilibre entre les puissances P, R, & le poids K, les produits de ces deux puissances P, R, par les perpendiculaires LM, LN, menée de quelque point L que ce soit de la direction du poids K, sont toujours alors égaux entr'eux.

C O R O L L A I R E II.

Mais en prenant AL pour le sinus total, on sçait (*Déf. 9. Corol. 1.*) que ces perpendiculaires LN, LM, sont les sinus des angles LAN, LAM. Donc aussi (*Corol. 1.*) les puissances P, R, sont pareillement ici en raison reciproque des sinus des angles LAM, LAN, que leurs directions AP, AR, y font avec celle AD du poids K ; & par con-

sequent (*Déf. 9. Corol. 2.*) ces mêmes puissances P, R , y sont aussi entr'elles en raison reciproque des sinus des angles PAX, RAX , complemens chacun de chacun de ces deux-là à deuxdroits ; c'est-à-dire, que P est ici à R , comme le sinus de l'angle LAN au sinus de l'angle LAM ; ou P à R , comme le sinus de l'angle RAX au sinus de l'angle PAX .

COROLLAIRE III.

Si pour nous exprimer plus aisément, on suppose une troisième puissance appelée K à la place du poids de ce nom, laquelle suivant la direction KX ou AD de ce poids, fasse comme lui équilibre avec les deux P, R , qui le soutiennent ; on trouvera par le Lem. 8. comme dans le Corol. 1. que ces trois puissances P, R, K , prises à volonté deux à deux, sont toujours entr'elles en raison reciproque des perpendiculaires menées d'un point quelconque de la direction de la troisième sur les leurs ; c'est-à-dire, en raison reciproque des distances de leurs directions à quelque point que ce soit de celle de la troisième de ces puissances ; & conséquemment (comme dans le Corol. 2.) que deux de ces trois puissances prises ainsi à volonté, sont toujours entr'elles en raison reciproque des sinus des angles que leurs directions font avec celle de la troisième puissance.

On ne trace point ici les perpendiculaires mentionnées dans le précédent Corol. 3. de peur d'embrouiller les Figures par la multiplicité des lignes, il est aisé de les imaginer sur celles du Lem. 8.

COROLLAIRE IV.

De plus puisque (*Corol. 1.*) en ce cas d'équilibre $P. R :: AB.AC$. Et $R. K :: AC.AD$. les trois puissances P, R, K , y seront toujours entr'elles en raison des lignes AB, AC, AD , ou (à cause de $BD=AC$) en raison des côtes AB, BD, AD , du triangle ABD ; & conséquemment aussi toujours entr'elles (*Lem. 8. Corol. 2.*) en raison des sinus

des angles ADB, DAB, DBA, ou (*Déf. 9. Corol. 2.*) des sinus des angles DAR, DAP, PAR, ou bien aussi (*Lem. 8. Corol. 5.*) des sinus des angles RAX, PAX, PAR, complemens chacun de chacun de ceux-là à deux droits; c'est-à-dire, que ces trois puissances P, R, K, seront toujours ici entr'elles en raison des sinus des angles RAX, PAX, PAR, que leurs directions prolongées traverseroient, ou traversent en effet.

C O R O L L A I R E V.

D'où l'on voit que de ces trois puissances P, R, K, supposées en équilibre entr'elles, de quelque manière qu'on les prenne, & quelques angles que leurs directions fassent entr'elles; chacune sera toujours à chacune des deux autres, comme le sinus de l'angle que font entr'elles les cordes ou directions de ces deux autres puissances, sera à chacun des sinus des angles que ces directions réciproquement prises font avec la sienne, qui (*part. 1.*) se trouve toujours dans le concours de ces deux-là, & dans leur plan: par exemple, K sera à P, comme le sinus de l'angle PAR au sinus de l'angle RAX, ou RAD; K sera à R, comme le sinus du même angle PAR au sinus de l'angle PAX ou PAD; & conformément au Corol. 2. P sera à R, comme le sinus de l'angle RAX ou RAD, au sinus de l'angle PAX ou PAD.

C O R O L L A I R E V I.

Si l'on imagine présentement un autre triangle ILM de trois côtes LM, LI, MI, perpendiculaires en M, N, O, aux trois directions ou cordons prolongez AP, AR, AX, de ces trois puissances, P, R, K; le Corol. 8. du Lem. 8. fait voir que ces trois côtes LM, LI, MI, du triangle ILM, seront entr'eux comme les sinus des angles RAX, PAX, PAR, que traverseroient, ou que traversent en effet les directions prolongées, auxquelles ils sont (*Hyp.*) perpendiculaires. Donc (*Corol. 4.*) ces trois côtes LM, LI, MI, de ce nouveau triangle ILM, seront

aussi entr'eux comme les trois puissances P, R, K , aux directions desquelles ils sont perpendiculaires. Par conséquent en ce cas d'équilibre,

1°. Chacune de ces trois puissances P, R, K , doit toujours être plus petite que la somme des deux autres.

2°. Lorsque l'angle PAR devient infiniment aigu, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 1.*) lorsque les directions PG, RH , des puissances P, R , se trouvent parallèles entre-elles, & conséquemment aussi (*Lem. 6. Corol. 1.*) parallèles à la direction AX de la puissance K , les angles PAD, RAD , se trouvant aussi pour lors infiniment aigus; alors le complément MLI (à deux droits) de l'angle PAR , se trouvant (*Corol. Déf. 11.*) infiniment obtus, c'est-à-dire (*Déf. 11.*) ML, LI , en ligne droite, & conséquemment la droite MI confondue avec elles, & égale à leur somme; la puissance K doit aussi pour lors être égale à la somme des deux autres puissances P, R , toujours entr'elles, comme LM est à LI .

3°. Si l'angle PAR devenoit infiniment obtus, alors son complément MLI à deux droits se trouvant (*Déf. 11. Corol.*) infiniment aigu; & conséquemment (*Lem. 6. Corol. 3.*) LM, LI , confondues ensemble, sans que MI , toujours (*Hyp.*) perpendiculaire à AX prolongée, puisse se confondre avec elles; l'on aura pour lors $MI=0$, & (*Lem. 6. Corol. 3.*) $LM=LI$: ainsi la puissance K sera pareillement alors tout-à-fait anéantie ou nulle, & les deux autres puissances P, R , égales entr'elles.

4°. Donc quelles que soient deux puissances P, R , appliquées aux extrémités d'une corde parfaitement flexible, & quelque petite que puisse être la pesanteur de cette corde, ou du poids K supposé au lieu de la pesanteur de cette même corde, & de direction qui fasse un angle avec celles des puissances; jamais ces deux puissances P, R , ne pourront bander cette corde en ligne droite, à moins qu'elles ne soient infinies par rapport à la pesanteur de cette corde, ou au poids K supposé à la place de cette pesanteur, si l'on suppose cette corde n'en point avoir,

comme on l'a supposé jusqu'ici; puisque pour la bander en ligne droite, cette pesanteur, ou ce poids K doit être nul (*nombr.* 3.) par rapport aux puissances P, R , qui appliquées l'une contre l'autre, la banderoient ainsi.

COROLLAIRE. VII.

Il suit pareillement des Corol. 4. 6. que si l'on fait séparément un triangle qui ait ses trois côtes parallèles ou perpendiculaires aux directions des trois puissances P, R, K , chacun à chacune de ces directions; ces trois côtes de ce nouveau triangle seront encore entr'eux en raison de ces trois puissances P, R, K , aux directions desquelles ils seront (*Hyp.*) tous trois parallèles ou perpendiculaires chacun à chacune; puisque ce nouveau triangle sera pour lors semblable à celui ABD du Corol. 4. ou à celui MLI du Corol. 6. selon que les trois côtes seront parallèles ou perpendiculaires aux trois directions AP, AR, AX , des trois puissances P, R, K , proportionnelles (*Corol.* 4. 6.) aux trois côtes correspondans de chacun de ces deux-ci ABD, MLI .

COROLLAIRE VIII.

Puisqu'en cas d'équilibre entre les puissances P, R, K , ces trois puissances sont entr'elles (*Corol.* 4. 6. 7.) comme les côtes AB, BD, AD , du triangle ABD du Corol. 4. & comme les correspondans de chacun des triangles des Corol. 6. 7. il est visible, que puisque chaque côté d'un triangle est toujours plus petit que la somme des deux autres, de quelque manière qu'on prenne ces trois puissances, chacune d'elle sera aussi toujours plus petite que la somme des deux autres, tant que leurs directions feront angles entr'elles, ainsi qu'on l'a déjà vu dans le *nombr.* 1. du Corol. 6.

COROLLAIRE IX.

En ce cas d'équilibre non seulement chacune des trois puissances P, R, K , est toujours moindre (*Corol.* 8.) que

la somme des deux autres, tant que leurs directions font des angles finis quelconques entr'elles, mais encore d'autant moindre (quoiqu'en raison différente) que l'angle compris entre les directions de ces deux autres puissances, sera plus grand: par exemple, la puissance K sera d'autant moindre que la somme des deux autres P, R, que l'angle PAR compris entre leurs directions, sera plus grand; puisqu'alors la diagonale AD du parallélogramme ABDC en sera d'autant moindre (quoiqu'en raison différente) par rapport à ses côtez AB, AC; & que (*part. 3.*) en ce cas d'équilibre la puissance K est toujours à chacune des deux autres P, R, comme cette diagonale AD est à chacun de ses côtez correspondans AB, AC. La même chose se trouvera de même de chacune des puissances, P, R, en faisant aussi un parallélogramme qui ait sa diagonale sur la direction de cette puissance, & ses côtez sur les directions de l'autre, & de la puissance K. Ainsi il est également vrai de ces trois puissances P, R, K, que chacune d'elle est d'autant moindre (quoiqu'en raison différente) que l'angle compris entre les directions des deux autres est plus grand.

[Cela suit encore du Corol. 6. du Lem. 8. & du précédent Corol. 4. Puisque (*Lem. 8. Corol. 6.*) plus l'angle total, par exemple, PAR sera grand, plus le rapport de son sinus à chacun des sinus des deux angles partiels DAR, DAP, sera petit; & que suivant le précédent Corol. 4. la puissance K est toujours ici à chacune des puissances P, R, comme le sinus de cet angle total PAR à chacun des sinus des deux partiels DAR, DAP. Donc la puissance K sera toujours ici d'autant moindre que la somme $P+R$ des deux autres P, R, que l'angle PAR sera plus grand. On trouvera de même en prolongeant les directions PA, RA, de ces deux puissances-ci, à travers les angles RAX, PAX, que la puissance P sera d'autant moindre que la somme $K+R$ des deux autres, que l'angle RAX sera plus grand; & que R sera d'autant moindre que $K+P$, que l'angle PAX sera aussi plus grand.

COROLLAIRE

COROLLAIRE X.

Mais si l'angle que font entr'elles les directions prolongées PG, RH, des puissances P, R, étoit infiniment aigu, & conséquemment aussi les angles PAD, RAD, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 1.*) si ces deux directions étoient parallèles entr'elles, & ces deux puissances dirigées en même sens directement contraire à celui de la troisième K en équilibre (*Hyp.*) avec elles, le sinus de l'angle PAR se trouvant alors (*Lem. 7.*) seul égal à la somme des sinus des deux autres angles partiels PAD, RAD, la puissance K ou le poids de ce nom remis à sa place, se trouveroit aussi pour lors (*Corol. 4.*) seul égal à la somme des deux autres puissances P, R, prises ensemble, ainsi qu'on l'a déjà vu dans le nomb. 2. du Corol. 6. Et en tout autre cas d'équilibre, ce poids ou cette autre puissance K seroit moindre (*Corol. 6. nomb. 1. & Corol. 8.*) que cette somme des deux autres puissances P, R.

Cela se prouve encore par la part. 1. du Lem. 9. laquelle fait voir que lorsque l'angle PAR se trouve infiniment aigu, la diagonale AD du parallélogramme BC se trouve égale à la somme des côtes AB, AC, de ce parallélogramme. Mais la part. 3. du présent Th. 1. fait voir aussi que le poids K en équilibre (*Hyp.*) avec les puissances P, R, est toujours à chacune d'elles comme cette diagonale AD est à chacun de ces côtes AB, AC. Donc en ce cas-ci d'équilibre, & d'angle PAR infiniment aigu, ou (*Lem. 6. Corol. 1.*) de directions parallèles entr'elles, le poids K doit être seul égal à la somme des puissances P, R; & en tout autre cas d'équilibre moindre (*Corol. 6. nomb. 1. & Corol. 8.*) que cette somme.

Ainsi en general en cas d'équilibre entre deux puissances & un poids qu'elles soutiennent ensemble avec des cordes seulement suivant des directions parallèles à la sienne, & toutes deux en même sens directement contraire au sien, leur somme doit toujours être égale à la

seule pesanteur de ce poids ; & en tout autre cas d'équilibre encore (*Corol. 6. nomb. 1. & Corol. 8.*) toujours plus grande.

C O R O L L A I R E X I.

Au contraire dans le cas où l'angle PAR feroit infiniment obtus, c'est-à-dire (*Déf. 11.*) où les directions PG, RH, des puissances P, R, feroient en ligne droite, & ces deux puissances directement contraires entr'elles.

1°. Si cette direction commune ne faisoit qu'un angle infiniment petit avec la verticale du poids K, en sorte qu'elle fût aussi verticale, & (*part. 1. 2.*) confondue avec celle-là ; alors le sinus de l'angle total PAR se trouvant (*Lem. 7. Corol. 2.*) égal à la différence des sinus des angles partiels PAD, RAD, le poids K feroit aussi égal à la différence des puissances P, R, supposées en équilibre avec lui.

Cela suit encore de l'Ax. 4. en ce qu'alors ce poids d'accord avec une de ces deux puissances n'en faisant plus qu'une avec elle, directement opposée à l'autre, cette autre puissance feroit (*Ax. 4.*) égale à la somme faite de la première, & de ce poids ; & par conséquent ce poids K feroit encore alors égal à la différence de ces deux puissances P, R.

2°. Mais si les directions de ces deux puissances rendues en ligne droite (*Déf. 11.*) par l'angle infiniment obtus PAR, font toujours des angles finis PAD, RAD, avec celle du poids K supposé en équilibre avec ces deux puissances P, R ; alors le sinus de l'angle infiniment obtus PAR se trouvant infiniment petit, & conséquemment nul par rapport aux sinus des deux autres angles PAD, RAD, supposez finis, le poids K se trouveroit aussi pour lors (*Corol. 4.*) nul par rapport aux deux puissances P, R, lesquelles agissent alors seulement l'une contre l'autre conformément au nomb. 3. du Corol. 6. Ainsi tant qu'il reste un poids K entre ces deux puissances P, R, attaché à leurs cordes, ces deux cordes prolongées doivent tou-

jours faire entr'elles quelque angle fini PAR que ce soit, tant qu'elles en feront de finis avec la direction de ce poids K.

C O R O L L A I R E XII.

De-là on voit qu'il n'y a point de forces ou de puissances imaginables, quelque grandes qu'on les conçoive, qui, appliquées aux extrêmités d'une corde parfaitement flexible, la puissent tellement bander, qu'elle devienne parfaitement droite, pour peu de pesanteur qu'on suppose à cette corde, ou si elle n'en avoit aucune (ainsi qu'on l'a supposé jusqu'ici, & qu'on le supposera toujours dans la suite) quelque petit poids qu'on lui suppose appliqué entre ces deux puissances; puisque quelque prodigieuses qu'on les imagine (à moins qu'elles ne soient infiniment grandes par rapport à la pesanteur de la corde, ou du poids qui lui seroit appliqué, si elle n'en avoit aucune) elles auront toujours quelques rapports à la pesanteur de cette corde, ou au poids qui seroit appliqué entre ces deux puissances, si elle n'en avoit aucune; & par conséquent cette corde se courbera toujours, ainsi qu'on l'a déjà vû dans le nombre 4. du Corol. 6. Et cela parce que si cette corde devenoit droite, les deux puissances qui la banderoient ainsi, n'agiroient plus du tout contre son poids, mais seulement l'une contre l'autre: raison assez à la portée du vulgaire, pour dissiper seule toute la surprise où il est de voir qu'une corde avec laquelle plusieurs chevaux traînent contre le courant d'une rivière un ou plusieurs bateaux chargez, ne se trouve jamais en ligne droite.

C O R O L L A I R E XIII.

Si l'on imagine presentement de B en C une seconde diagonale du parallelogramme ABDC, il est manifeste (Def. 13.) que le point T où cette seconde diagonale rencontrera la premiere AD, sera le centre principal d'équilibre des puissances P, R; & qu'ainsi (conformé-

Oij

ment au Lem. 11.) AD sera double de la distance AT de ce centre T au point A de concours des directions de ces deux puissances. Mais en cas d'équilibre entre le poids K & ces deux puissances P, R, ce poids est toujours (part. 3. 4.) à chacune d'elles comme AD est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC. Donc aussi en ce cas d'équilibre ce même poids K sera toujours à chacune de ces deux puissances P, R, comme deux fois la distance AT de leur centre principal T d'équilibre au concours A de leurs directions, est à chacune de leurs mêmes proportionnelles AB, AC.

Voilà tout autant de Corollaires resultans des part. 3. 4. de ce Théoreme-ci, en voici qui resultent pareillement de ses parties 5. 6. reciproques à celles-là, sans avoir encore aucun égard à la pesanteur des cordes.

COROLLAIRE XIV.

Il suit aussi des part. 5. 6. de ce Théoreme-ci que si la direction du poids K est suivant la distance AT du centre principal T d'équilibre des puissances P, R, au concours A de leurs directions; & que ce poids soit à chacune de ces deux puissances comme $2 \times AT$ à chacune de leurs proportionnelles AB, AC; il y aura équilibre entre ce poids & ces deux puissances. Car le centre principal T d'équilibre de ces deux puissances P, R, étant (Déf. 13.) le milieu de la ligne imaginée par les extrêmités B, C, de leurs proportionnelles AB, AC, il sera aussi le milieu de la diagonale AD du parallelogramme ABDC fait de ces deux proportionnelles; & conséquemment AT sera sur AD, & $AD = 2 \times AT$. Donc suivant l'hypothèse qu'on vient de faire, la direction du poids K sera suivant AD; & ce poids à chacune des puissances P, R, comme cette diagonale AD du parallelogramme ABDC est à chacun de ses côtes AB, AC, correspondans. Par conséquent (part. 5. 6.) dans cette hypothèse il y aura équilibre entre ce poids K, & ces deux puissances P, R.

COROLLAIRE XV.

Il suit pareillement des part. 5. 6. de ce Théoreme-ci, que si le poids K est à chacune des puissances P, R, comme le sinus de l'angle PAR à chacun des sinus des angles RAX, PAX, ou (*Déf. 9. Corol. 2.*) RAD, PAD ; elles le soutiendront en cet état, & feront équilibre avec lui. Car ce poids K se trouvant alors à ces puissances P, R, comme le sinus de l'angle PAR aux sinus des angles RAD, PAD, ou (*Déf. 9. Corol. 2.*) comme le sinus de l'angle DBA du triangle ABD, aux sinus de ses deux autres angles BDA, BAD, doit être aussi pour lors (*Lem. 8. Corol. 2.*) à ces mêmes puissances, comme le côté AD de ce triangle à ses deux autres côtes AB, BD, c'est-à-dire, comme la diagonale AD du parallélogramme ABDC, prise sur la direction de ce poids K, est à ses côtes AB, AC, pris aussi sur les directions de ces puissances P, R. Par conséquent (*part. 5. 6.*) ce poids doit alors faire équilibre avec elles.

COROLLAIRE XVI.

D'où il suit qu'il n'y a point de puissance R si petite, Fig. 576 qui à l'aide seulement d'une corde PAK, attachée par un bout à un crochet P, ne puisse soutenir quelque grand poids K que ce soit (attaché à l'autre bout de cette corde) hors sa position libre PF, quelque angle que la direction de cette puissance fasse avec cette position libre PF, que je suppose, à l'ordinaire, toujours parallèle à la direction de ce poids, & conséquemment verticale.

Pour le voir soit BC la direction qu'on veut donner à la puissance R, laquelle BC fasse tel angle PBC qu'on voudra avec la verticale PF, ou (*Hyp.*) avec la direction du poids K, & sur laquelle BC soit prise BA à BP dans la raison supposée de cette puissance R à ce poids K : je dis que cette puissance R, appliquée suivant sa direction BC à la corde en A, y retiendra le poids K en équilibre avec elle. Car si l'on imagine une parallèle DC à PA, la-

quelle rencontre en D, C, les directions prolongées AK, BA, de ce poids K & de cette puissance R; l'on aura AC. AD :: AB. BP (*Hyp.*) :: R. K. Et conséquemment (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) cette puissance sera à ce poids K, comme le sinus de l'angle D ou DAP au sinus de l'angle DCA, c'est-à-dire (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) comme le sinus de l'angle PAK au sinus de l'angle PAC. Donc la résistance du crochet P faisant (*Ax.* 2.) la fonction d'une troisième puissance qui leur feroit comme le sinus de l'angle KAC aux sinus des angles PAC, PAK; le poids K sera ainsi soutenu en A (*Corol.* 15.) par la puissance R, quelque soit le rapport fini d'elle à lui.

Cela suit encore des Corol. 11. 12. non seulement dans la présente hypothèse des directions des graves toujours parallèles entr'elles; mais aussi quand même elles se rencontreroient quelque part, par exemple, au centre de la Terre, par où PF passât; puisque sans cela la corde PAK de la suspension du poids K, demeureroit en ligne droite PF malgré la puissance R. Ce qui, suivant les Corol. 11. 12. seroit impossible.

COROLLAIRE XVII.

Donc il n'y a point de force R, quelque petite qu'on l'imagine, & quelque soit l'angle de sa direction avec celle d'un poids suspendu à une corde; laquelle, quelque grand qu'on le suppose, ne soit capable de le faire sortir de la verticale PF, suivant laquelle (*Déf.* 9. & *Lem.* 3. *Corol.* 3.) ce poids se dirigeroit: & cela jusqu'à ce que les sinus des angles PAC, PAK, soient entr'eux en raison de ce poids K à cette puissance R.

COROLLAIRE XVIII.

Et parce que ce mouvement est impossible, à moins que ce poids ne monte de même que le point A de la corde, de la hauteur du sinus versé HE de l'angle APE fait par la partie AP de la corde avec la verticale AE, supposée parallèle à la direction du poids; il suit évidem-

ment qu'il n'y a point de force, quelque petite qu'on l'imagine, qui ne soit capable de faire monter à cette hauteur quelque grand poids que ce soit, à l'aide seulement d'une corde attachée à quelque point fixe.

Voilà pour les directions des graves paralleles entr'elles; mais si elles concourent en quelque endroit du monde, le poids K doit monter d'une plus grande hauteur que AF, si ce concours est du côté de F; & d'une moindre, s'il est du côté de P: & ce d'autant plus ou moins grande (quoiqu'en raison différente) que l'angle de concours de la direction du poids K retenu en A, & de la verticale PF, seroit plus grand. Tout cela est clair aux moindres Géometres, même par le seul Liv. 1. des Elemens d'Euclide: c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas davantage.

C O R O L L A I R E XIX.

La construction du triangle MLI demeurant ici la même que dans le Corol. 6. ce Corol. 6. joint au Corol. 5. qui le précède, fait aussi voir que si le poids K & les puissances P, R, sont entr'eux comme les côtez MI, ML, LI, de ce triangle, perpendiculaires (*Hyp.*) en O, M, N, aux directions AD, AP, AR, de ce poids & de ces deux puissances; ce poids doit demeurer en équilibre avec elles. Car le Corol. 2. du Lem. 8. faisant voir que les trois côtez MI, ML, LI, du triangle MLI, sont entr'eux comme les sinus des angles PAR, DAR, DAP, dont le premier est visiblement le complement (à deux droits) de MLI, & les deux autres égaux à LIM, LMI, chacun à chacun; l'on aura pour lors le poids K aux puissances P, R, comme le sinus de l'angle PAR est au sinus des angles DAR, DAP. Or en ce cas (*Corol. 15.*) ce poids K demeureroit en équilibre avec ces deux puissances P, R. Donc il y doit aussi demeurer, lorsque lui & elles sont entr'eux comme les côtez MI, ML, LI, du triangle MLI, perpendiculaires (*Hyp.*) à leurs directions AD, AP, AR.

FIG. 52
53. 54. 55.
56.

COROLLAIRE XX.

Il suit encore du Corol. 15. joint au Corol. 2. de la Déf. 9. que si au lieu du poids K on mettoit quelque nouvelle puissance, appelée aussi K, laquelle fût aux deux puissances P, R, comme le sinus de l'angle PAR aux sinus des angles RAX, PAX; en sorte que ces trois puissances K, P, R, fussent entr'elles comme les sinus des trois angles PAR, RAX, PAX, au travers desquels leurs directions ou cordes prolongées passeroient; elles demeureroient en équilibre entr'elles, de manière qu'aucune d'elles ne l'emporteroit sur aucune des deux autres.

COROLLAIRE XXI.

On voit de-là, & des précédens Corol. 14. 15. 16. 17. 18. 19. que sans rien changer à l'inclinaison des cordes PG, RH, par rapport à AX, une infinité d'autres puissances mises en la place des précédentes P, R, K, pourront demeurer en équilibre entr'elles trois à trois, pourvu qu'ainsi prises trois à trois, elles soient entr'elles comme ces trois premières.

COROLLAIRE XXII.

On peut aussi en changeant l'inclinaison de ces cordes ou directions, conserver l'équilibre entr'elles de ces puissances P, R, K, dans quatre positions différentes de ces mêmes cordes, ou dans trois variations différentes des angles qu'elles font entr'elles, pourvu que ces trois puissances fassent échange entr'elles, jusqu'à ce que chacune d'elles se trouve successivement appliquée à chacune de ces cordes dans deux situations différentes des deux autres. Pour voir tout cela, il n'y a qu'à s'imaginer que lorsque deux puissances, par exemple, P, R, dans la Fig. 54. font échange de leurs cordes, il se fait en même tems une échange des angles que ces mêmes cordes faisoient auparavant avec celle de la puissance K, qui n'en change point alors, sans qu'il arrive aucun changement à

à l'angle PAR que ces deux cordes-là faisoient entr'elles : de cette maniere l'on aura deux des cas dont il est ici question. On en trouvera encore deux en concevant de même l'échange d'angles qui se fera de même dans l'échange des cordes de P & de K , sans toucher à celle de R ; & encore deux pour l'échange de celles de K , R. C'est ainsi que l'on auroit six positions différentes des cordes des puissances P , R , K , sans que ces trois puissances cessassent d'être en équilibre entr'elles, si ce n'est que la premiere de ces positions, dans laquelle ces puissances étoient (*Hyp.*) d'abord en équilibre entr'elles, se trouve ici repetée trois fois ; sçavoir une avec chacune des trois autres positions ; ce qui en fournit trois fois deux. Ainsi il n'y en a que quatre en tout où l'équilibre se puisse conserver entre les trois puissances supposées dans l'échange de cordes & d'angles dont il s'agit ici.

C O R O L L A I R E XXIII.

Mais tant que chacune de ces trois puissances P , R , K , demeure appliquée à la même corde ou branche de corde, l'on ne peut en changer la direction, c'est-à-dire, l'inclinaison de ces cordes, ou leurs angles, sans rompre l'équilibre supposé entre ces puissances ; puisqu'il n'est pas possible de trouver seulement deux situations d'aucune de leurs cordes, dans lesquelles les sinus des trois angles PAR , RAX , PAX , ayent les mêmes rapports entr'eux, ni conséquemment les mêmes rapports que ceux des puissances K , P , R ; rapports cependant nécessaires (*Cor. 4.*) entre ces trois sinus pour que ces trois puissances soient en équilibre entr'elles.

C O R O L L A I R E XXIV.

C'est ce qui fait qu'autant de fois que l'angle PAR compris entre les cordes ou directions des puissances P , R , variera, il faudra tout autant de poids differens pour faire équilibre avec ces deux mêmes puissances. En effet plus cet angle sera grand, plus le poids K , qu'elles au-

ront à soutenir, devra (*Corol. 9.*) être petit par rapport à elles (quoiqu'en raison différente) pour faire équilibre avec elles : de sorte qu'on peut faire cet angle PAR si obtus que ces deux puissances P, R, demeurant toujours les mêmes, soutiendront ensemble en équilibre un poids K si petit qu'on voudra, pourvû (*Corol. 6. nomb. 1. & Corol. 8.*) que la somme faite de sa pesanteur & de chacune de ces deux puissances, soit plus grande que l'autre seule, & lui moindre que ces deux ensemble. Ainsi cela se trouvant toujours tant que ces deux puissances sont égales entr'elles, & ce poids moindre que leur somme; ce poids K peut alors diminuer à l'infini, & cependant par l'augmentation de l'angle PAR faire toujours équilibre avec ces deux puissances P, R, quelque grandes qu'on les suppose. Mais si au contraire la pesanteur de ce poids se trouvoit seule plus grande que la somme de ces deux puissances, le nomb. 1. du *Corol. 6.* & le *Corol. 8.* font voir qu'elles ne pourroient alors le soutenir en équilibre, quelque angle PAR que les directions de ces deux puissances fissent entr'elles: & si ce poids étoit seul égal à leur somme, il faudroit pour cela (*Corol. 6. nomb. 2. & Corol. 10.*) que l'angle PAR fût infiniment petit; & conséquemment (*Lem. 6. Corol. 2. 3. & part. 1.*) que ces deux puissances agissent alors en même tems contre ce poids suivant des directions toutes deux paralleles à la sienne, ou confondues toutes deux avec elle. D'où l'on voit (*Corol. 6. nomb. 1. 2. 3.*) que depuis l'égalité de ce poids avec la somme de ces deux puissances, jusqu'à se trouver infiniment petit par rapport à elles, il pourra toujours faire équilibre avec elles, si elles sont égales entr'elles.

C O R O L L A I R E XXV.

C'est ce qui peut arriver en changeant la direction de l'une & de l'autre de ces deux puissances P, R : mais à ne changer qu'une de ces directions,

1°. Si ces deux puissances sont égales, ou si étant iné-

gales entr'elles, il s'en trouve une qui ait sa direction horizontale, comme dans la Fig. 53. il est clair qu'en ne changeant la direction que d'une de ces deux puissances P, R, on changeroit aussi le rapport des sinus des angles que leurs cordes faisoient avec la direction du poids, ou si ce rapport se trouvoit encore le même, comme il peut arriver lorsque ces deux puissances sont égales entr'elles, leurs directions seroient alors en ligne droite: ainsi ces deux puissances P, R, ne pourroient plus (*Corol. 5. & 11.*) soutenir le poids K, avec lequel on les supposoit en équilibre avant ce changement, ni aucune autre puissance de même direction que lui.

2°. Au contraire si ces deux puissances P, R, sont inégales, & qu'elles n'ayent aucune de leurs cordes ou directions qui soit horizontale; au lieu du poids K, avec lequel on les suppose en équilibre, on pourra encore leur en faire soutenir un autre, pourvû que des directions de ces deux puissances on change tellement celle qui vers le haut fait le plus grand angle avec celle du poids K supposé en équilibre avec elles, qu'on lui en fasse faire un autre avec celle-ci, lequel soit le complement de celui-là à deux droits. Car les sinus des angles que les cordes ou directions de ces deux puissances P, R, font avec celle du poids K après un tel changement, étant encore (*Déf. 9. Corol. 2.*) les mêmes qu'auparavant; ces deux mêmes puissances P, R, pourront encore (*Corol. 15.*) soutenir ici un autre poids au lieu de K, auquel nouveau poids elles feront comme ces mêmes sinus reciproquement pris, au sinus de l'angle que leurs cordes ou directions y feront entr'elles; c'est-à-dire, un nouveau poids qui sera (*Cor. 5.*) à celui K qu'elles soutenoient auparavant, comme ce dernier sinus à celui de l'angle qu'elles faisoient alors entr'elles: mais aussi par une raison toute contraire en tout autre changement d'une des directions de ces deux puissances P, R, ces deux puissances ne pourront plus rien soutenir tant que les deux autres directions demeureront les mêmes qu'auparavant.

La raison pour laquelle on vient de demander (nomb. 2.) que ce changement se fist dans celle des directions des puissances, qui fait le plus grand angle vers le haut avec celle du poids qu'elles soutiennent; c'est que si on faisoit un tel changement à l'autre de ces deux directions, l'angle qu'elles feroient entr'elles, se tourneroit alors en dessous; ce qui détermineroit (Lem. 3. part. 2.) l'action de ces deux puissances à seconder la pesanteur du poids plutôt qu'à le soutenir.

S C H O L I E.

I. Voilà bien des manieres de reconnoître les rapports de trois puissances supposées en équilibre entr'elles avec des cordes seulement; & reciproquement qu'avec de tels rapports. elles doivent toujours demeurer ainsi en équilibre entr'elles. Quant à l'impossibilité de cet équilibre,

1°. Les part. 1. 2. faisant voir que lorsqu'il se trouve entre ces trois puissances, leurs directions sont toujours toutes trois en même plan par un même point, ou paralleles entr'elles, & que chacune de ces trois puissances se trouve toujours alors suivant la direction de la force resultante du concours des deux autres: il suit que l'équilibre seroit impossible entr'elles, s'il y manquoit quelque une de ces choses; puisqu'en cas d'équilibre (part. 1. 2.) il n'y en manqueroit aucune.

2°. Les part. 3. 4. font voir aussi que quand il n'y manqueroit rien de tout cela, cet équilibre ne manqueroit pas d'être encore impossible, si les trois puissances n'étoient pas entr'elles comme la diagonale & les côtes du parallelogramme qui les eût sur leurs directions; & conséquemment aussi si elles n'étoient pas entr'elles comme les sinus des angles marquez dans les Co. ol. de ces part. 3. 4. puisque suivant ces mêmes part. 3. 4. & leurs Corollaires ces trois puissances auroient toujours ces rapports entr'elles en cas d'équilibre.

II. Il est à remarquer en ce cas d'équilibre, que si d'un point quelconque de la direction de celle qu'on

voudra des trois puissances P, K, R , on mène des perpendiculaires sur les directions des deux autres ; les produits faits de ces deux autres puissances multipliées chacune par celle de ces perpendiculaires, qui le fera à sa direction, seront toujours égaux entr'eux. Par exemple, si d'un point quelconque L de la direction AD de la puissance ou poids K , on conçoit encore (comme dans le Corol. 1.) LM, LN , perpendiculaires aux directions AP, AR , des puissances P, R , supposées en équilibre avec celle-là ; l'on aura toujours $P \times LM = R \times LN$; puisque ce cas d'équilibre donne toujours (Cor. 1.) $P.R :: LN.LM :: AB.AC$ (Lem. 9.) On démontrera de même que le produit des puissances K, R , multipliées par les perpendiculaires menées de tel point M qu'on voudra de la direction AP de la puissance P sur les leurs, seront égaux entr'eux. La même chose se démontrera aussi de même des produits faits des puissances P, K , par les perpendiculaires menées d'un point quelconque de la direction AR de la puissance R sur les leurs.

Tel est jusqu'ici le fondement de tout ce qui se peut dire des poids soutenus avec des cordes seulement, ou des puissances appliquées les unes contre les autres à des cordes seulement : Fondement consistant dans le seul Th. 1. dont on vient de voir la fécondité. En voici l'application à quelques autres plus compliquées sur le même sujet.

T H E O R E M E II.

Les Figures demeurant ici les mêmes que dans le précédent Th. 1. ce que les puissances P, R , supposées en équilibre avec le poids K , ont de force ou d'action verticale pour ou contre ce poids suivant sa direction KX , est toujours (à parler le langage de la Déf. 15.) en raison de leur sublimité, si elles tirent toutes deux de bas en haut, ou en raison de la sublimité de l'une à la profondeur de l'autre, si l'une tire de bas en haut, & l'autre de haut en bas.

Fig. 92.
53. 54. 55.
56.

D E M O N S T R A T I O N .

Le parallelogramme ABDC ayant , comme dans la part. 3. du Th. 1. sa diagonale AD sur la direction prolongée XK du poids K , & ses côtez AB , AC , sur les cordes ou directions AP , AR , des puissances P , R , supposées en équilibre avec ce poids par le moyen de ces cordes ; soient des angles B , C , du parallelogramme les perpendiculaires BE , CF , sur sa diagonale AD prolongée où besoin sera.

Cela fait , soient appellées E , F , les forces verticales employées selon la part. 2. du Lem. 3. par les puissances pour ou contre le poids K suivant sa direction XK. Cette même part. 2. du Lem. 3. fait voir que $E, F :: AE, AF$. Mais selon la Déf. 16. AE , AF , sont les sublimités des puissances P , R , dans toutes les Figures ici supposées , excepté dans la Fig. 53. où AE est nulle , & dans la Fig. 54. où AF est la profondeur de la puissance R , & la seule AE sublimité de la puissance P. Donc en ce cas d'équilibre entre le poids K & ces deux puissances P , R , les forces verticales E , F , de ces deux puissances pour ou contre ce poids sont toujours entr'elles en raison de leurs sublimités AE , AF , si ces puissances tirent toutes deux de bas en haut , comme dans les Fig. 52. 53. 55. 56. ou en raison de la sublimité AE de l'une P , à la profondeur AF de l'autre R , si la première de ces deux puissances P , R , tire de bas en haut , & la seconde de haut en bas , comme dans la Fig. 54. *Ce qu'il falloit démontrer.*

La direction horisontale AP de la puissance P dans la Fig. 53. pouvant être également prise pour infiniment peu élevée, ou pour infiniment peu abaissée par rapport à A , on la peut ajouter au cas de la Fig. 54. comme on la vient d'ajouter à celui des Fig. 52. 55. 56. la nullité de AE dans cette Fig. 53. l'y rendant également sublimité ou profondeur nulle.

C O R O L L A I R E I.

On voit de-là , en prolongeant CF jusqu'à la rencontre

de AP prolongée en Q, qu'en ce cas d'équilibre les forces verticales E, F, des puissances P, R, pour on contre le poids K suivant sa direction KX ou XD, sont aussi toujours entr'elles en raison réciproque des tangentes des angles PAD, RAD, que les directions de ces puissances font avec celle de ce poids. Car venant de trouver (*Lem. 3. part. 2.*) $E. F :: AE. AF$. Et les triangles (*constr.*) semblables QAF, BAE, CDF, donnant $AE. AF :: AB. AQ$ (le parallélogramme ABDC ayant $AB=DC$) $:: DC. AQ :: CF. FQ$. l'on aura pareillement ici $E. F :: CF. FQ$. Mais en prenant AE pour le rayon, la Déf. 10. avec son Corol. fait voir que CF, FQ, sont les tangentes des angles CAF, QAF, qui sont les mêmes que RAD, PAD. Donc les forces verticales E, F, des puissances P, R, pour ou contre le poids K suivant sa direction KX, ou XD, sont toujours ici entr'elles comme les tangentes des angles RAD, PAD, c'est-à-dire, en raison réciproque des tangentes des angles PAD, RAD, que les cordes ou directions de ces deux puissances P, R, font avec la direction du poids K, ainsi qu'on le vient d'avancer.

C O R O L L A I R E II.

Dans les Fig. 52. 55. 56. où les puissances P, R, tirent toutes deux de bas en haut, les parties du poids K, ou de sa pesanteur, soutenues dans ces Figures par ces puissances P, R, étant égales en pesanteur (*Lem. 3. Corol. nomb. 3.*) aux forces verticales E, F, directement contraires à ces pesanteurs partiales & en équilibre avec elles.

1°. Il suit encore du présent Th. 2. que ces parties du poids K, ainsi soutenues chacune par chacune des puissances P, R, en vertu de ces efforts verticaux E, F, sont toujours alors entr'elles comme les sublimitez AE, AF, de ces deux puissances; & conséquemment aussi comme les parties AE, ED de la diagonale AD, ou comme ses parties DF, FA: puisque les triangles égaux & semblables AFC, DEB, de même que AEB, DFC, rendent $AF=ED$, & $AE=DF$. D'où l'on voit que chacune des

perpendiculaires BE, CF, menées des extrêmités B, C, des proportionnelles AB, AC, des puissances P, R, sur la diagonale AD du parallélogramme ABDC, divisera toujours cette diagonale AD en raison des parties du poids K soutenues par les puissances P, R, supposées en équilibre avec lui, ou en raison des efforts verticaux que ces deux puissances font chacune contre lui.

2°. Il suit du même Corol. 1. que ces mêmes parties du poids K soutenues chacune par chacune des puissances P, R, en équilibre (*Hyp.*) avec lui, sont aussi toujours entr'elles en raison reciproque des tangentes des angles PAD, RAD, que les cordes ou directions de ces deux puissances P, R, font avec celle de ce poids.

C O R O L L A I R E III.

De plus de ce que les pesanteurs des parties du poids K soutenues par chacune des puissances P, R, sont (*Lem. 3. Corol. 2. nomb. 3.*) égales aux forces verticales E, F, directement contraires à ces pesanteurs partiales, & en équilibre avec elles; il suit que la puissance, par exemple, P sera à la partie qu'elle soutient de ce poids ou de sa pesanteur :: P. E (*Lem. 3. part. 1.*) :: AB. AE. c'est-à-dire (*Déf. 9. Corol. 1.*) comme le sinus total au sinus de l'angle ABE de sa direction AP avec l'horizontale BE. On trouvera de même que la puissance R est à la partie qu'elle soutient de ce même poids K ou de sa pesanteur :: AC. AF. c'est-à-dire encore, comme le sinus total au sinus de l'angle ACF de sa direction AR avec l'horizontale CF. D'où l'on voit que chacune de ces deux puissances P, R, supposées en équilibre avec le poids K, est toujours alors à ce qu'elle soutient pour sa part de la pesanteur de ce poids, comme le sinus total est au sinus de l'angle que la direction de cette puissance fait avec l'horizontale.

C O R O L L A I R E IV.

Si l'on appelle presentement Y, Z, les parties du poids

pois K, ou de sa pesanteur, soutenue chacune par chacune des puissances P, R, en sorte que $Y+Z=K$, l'on aura (*Corol.* 3.) $P.Y::AB.AE$. le nomb. 1. du *Corol.* 2. donnera de plus $AE.AF::Y.Z$. & conséquemment $AE.AF+AF::Y.Y+Z::Y.K$. ou $Y.K::AE.AF+AF$. Donc en raison ordonnée (entre cette dernière Analogie & la première) $P.K::AB.AF+AF$. On trouvera de même $R.K::AC.AF+AF$. Mais les triangles (*constr.*) semblables BAE, CDF, ayant $AB=DC$, ont aussi $DF=AE$. Donc $P.K::AB.DF+AF::AB.AD$. Et $R.K::AC.DF+AF::AC.AD$.

COROLLAIRE V.

Si l'angle PAR compris entre les directions des puissances P, R, étoit droit, & qu'ainsi le parallélogramme ABDC fût rectangle, par exemple, dans la Fig. 52. les angles (*Hyp.*) droits en E, rendant alors les trois triangles ABD, AEB, BED, semblables entr'eux, l'on auroit pour lors $AD.AB::AB.AE$. Et $AD.BD::BD.DE$. D'où resulteroit $AE=\frac{AB \times AB}{AD}$, DE ou $AF=\frac{BD \times BD}{AD}=\frac{AC \times AC}{AD}$, & de-là $AE.AF::AB \times AB.AC \times AC$. Or suivant les noms du *Corol.* 4. le nomb. 1. du *Corol.* 2. donne en general $Y.Z::AE.AF$. Donc l'on auroit ici $Y.Z::AB \times AB.AC \times AC$. c'est-à-dire, que dans la présente hypothèse de l'angle PAR droit, les parties Y, Z, que les puissances P, R, soutiendroient du poids K en équilibre avec elles, seroient toujours entr'elles comme les quarrés des proportionnelles AB, AC, de ces puissances P, R.

COROLLAIRE VI.

Voilà (*Corol.* 2. 3. 4. 5.) pour le cas où les puissances P, R, tirent toutes deux de bas en haut, contre le poids K en équilibre (*Hyp.*) avec elles. Mais si une d'elles, comme R dans la Fig. 54. tire de haut en bas en faveur de ce poids, & l'autre P encore de bas en haut : alors la force verticale F de la puissance R, se joignant à la pesan-

Q

teur du poids en sa faveur suivant une même direction AX, contre la seule force verticale E de la puissance P, qui par son action en sens contraire suivant cette même direction, les soutient seule toutes deux en équilibre; cette force verticale E, qui soutient ainsi seule ces deux-là réunies contr'elle en sens directement contraire au sien, doit (*Lem. 3. Corol. 2. nomb. 3.*) en égaliser la somme, & être $E = F + K$, ou $E - F = K$. Mais le présent Th. 2. donnant $E. F :: AE. AF$. donne conséquemment $E. E - F :: AE. AE - AF$. Donc $E. K :: AE. AE - AF$. Mais la part. 1. du Lem. 3. donne $P. E :: AB. AE$. Donc (en raison ordonnée) $P. K :: AB. AE - AF$. on trouvera de même $R. K :: AC. AE - AF$. Mais les triangles (*constr.*) semblables BAE, CDF, ayant $AB = DC$, ont aussi $AE = DF$. Donc $P. K :: AB. DF - AF :: AB. AD$. Et $R. K :: AC. DE - AF :: AC. AD$.

COROLLAIRE VII.

FIG. 52.
54. 55. 56.

Les Corol. 4. 6. donnant $P. K :: AB. AD$. Et $R. K :: AC. AD$. dans tous les cas imaginables d'équilibre entre deux puissances P, R, avec des cordes seulement; chacune des puissances P, R, sera toujours au poids K en équilibre (*Hyp.*) avec elles, comme chacun des côtes AB, AC, du parallélogramme ABDC, pris sur leurs directions, sera à la diagonale AD de ce parallélogramme, prise sur la direction de ce poids, ainsi qu'on l'a déjà vu dans les part. 3. 4. du Th. 1. Et de-là suit encore tout ce qu'on a tiré des Corollaires de ces part. 3. 4. du Th. 1.

COROLLAIRE VIII.

Donc, puisque (*Corol. 4.*) $AD = AE + AF$, lorsque les puissances P, R, tirent toutes deux de bas en haut contre le poids K, comme dans les Fig. 52. 53. 55. 56. & (*Corol. 6.*) $AD = AE - AF$, lorsqu'une de ces puissances, comme P dans la Fig. 54. tire de bas en haut contre ce poids, & l'autre R de haut en bas en sa faveur; ces deux puissances P, R, seront (*Corol. 7.*) à ce poids K, comme

Leurs proportionnelles AB, AC , à la somme $AE + AF$ de leurs sublimité dans le premier cas, & comme leurs proportionnelles à la différence $AE - AF$, dont la sublimité de l'une surpasse la profondeur de l'autre dans le second.

C O R O L L A I R E IX.

Si les cordes GP, HR , des puissances P, R , étoient parallèles entr'elles, & conséquemment aussi (*Theor. 1. part. 1.*) toutes deux parallèles à la direction XD du poids K en équilibre (*Hyp.*) avec elles; leurs sublimité AE, AF , dans les Fig. 52. 55. 56. où la sublimité AE de P , & la profondeur AF de R dans la Fig. 54. se confondant alors avec leurs proportionnelles AB, AC .

1°. Le poids K seroit (*Corol. 8.*) à chacune de ces deux puissances P, R , comme la somme ou la différence de leurs proportionnelles seroit à chacune de ces mêmes proportionnelles correspondantes: sçavoir, comme la somme $AB + AC$, lorsque ces puissances tirent toutes deux de bas en haut; & comme la différence $AB - AC$, lorsqu'une d'elles tire de bas en haut, & l'autre de haut en bas. D'où il suit que dans ce cas de directions parallèles de deux puissances, & d'un poids en équilibre avec elles, ce poids sera toujours égal à la somme ou à la différence de ces deux puissances, ainsi qu'on l'a déjà vu dans le *Corol. 11.*

2°. Lorsque ces puissances P, R , tirent toutes deux de bas en haut, les parties du poids K , qu'elles soutiennent chacune pour sa part, sont entr'elles (*Corol. 2. nomb. 1.*) comme les proportionnelles de ces puissances; & chacune de pesanteur égale (*Corol. 4.*) à chacune de ces puissances. Ce qui suit encore immédiatement de l'*Ax. 4.*

Voilà (*Corol. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.*) pour ce qui concerne tous les cas dans lesquels les puissances P, R , tirent toutes deux de bas en haut, ou une de bas en haut, & l'autre de haut en bas: voici présentement pour le cas où une de ces puissances tire de bas en haut, & l'autre horizontalement.

COROLLAIRE X.

Fig. 53.

Lorsqu'une des deux puissances, comme R dans la Fig. 53. tire de bas en haut contre le poids K, pendant que l'autre P tire horizontalement, c'est-à-dire (Déf. 14.) perpendiculairement à la direction XD de ce poids supposé en équilibre avec ces deux puissances;

1°. Ce cas rendant $AE=0$, en ce que la perpendiculaire BE sur la diagonale AD tomberoit alors en A, la puissance P n'auroit point ici de force verticale E, ni pour ni contre le poids K suivant la direction KX. Cela suit aussi de ce que le Corol. 1. donnant en general $E :: CF. FQ.$ le cas present, qui rend FQ infinie, & conséquemment FC nulle par rapport à elle, rendroit aussi E nulle par rapport à F, c'est-à-dire, $E=0$, la force verticale F de la puissance R étant finie.

2°. Cela étant, la puissance P ne soutiendrait ici rien (Lem. 3. Corol. 2. nomb. 1.) de la pesanteur du poids K: elle n'y serviroit qu'à soutenir l'effort horizontal (Lem. 3. Corol. 2. nomb. 1. 2.) de la puissance R, auquel cette puissance P directement opposée, & en équilibre avec lui, seroit (Lem. 3. Corol. 2. nomb. 3.) égale.

3°. L'effort vertical F de la puissance R, qui doit ici tirer de bas en haut, y soutiendrait donc seul la pesanteur du poids K; & conséquemment (Lem. 3. Corol. 2. nomb. 3.) il lui seroit égal. Ce qui suit aussi de ce que la part. 1. du Lem. 3. donnant $F.R :: AF.AC.$ Et le Corol. 6. donnant $R.K :: AC.AD.$ l'on auroit ici (en raison ordonnée) $F.K :: AF.AD.$ de sorte que la construction donnant ici $AF=AD$, l'on y auroit aussi $F=K$, ainsi qu'on le vient de voir.

4°. Ayant ici $AF=AD$, les puissances P, R, y seront au poids K (Corol. 8.) comme leurs proportionnelles AB, AC, à la sublimité AF de la seconde R de ces deux puissances.

S C H O L I E.

I. Des deux forces, l'une verticale, & l'autre horison- Fig. 52. 53.
54. 55. 56.
tale, dont est composée (*Lem. 2. Corol. 2.*) l'oblique de
chacune des puissances P, R , voilà jusqu'ici l'usage de la
première, c'est-à-dire, de la force verticale de chacune
de ces deux puissances, lequel usage consiste en ce que
cette force verticale est employée toute entière contre ou
pour le poids K suivant sa direction, selon que la puis-
sance qui l'emploie, tire de bas en haut, ou de haut en
bas; de sorte que les forces horisontales suivant AS, AV ,
des puissances P, R , ne faisant ni pour ni contre la pe-
santeur du poids K , tout ce qui reste d'action à ces deux
puissances pour soutenir ce poids, consiste dans la somme
ou dans la différence de leurs forces verticales suivant
 AE, AF , selon que ces mêmes puissances obliques tirent
toutes deux de bas en haut, ou l'une de bas en haut plus
fort que l'autre de haut en bas: & comme cette somme
ou différence de forces verticales est (*Déf. 14.*) directe-
ment opposée à la pesanteur du poids K , l'égalité de cet-
te pesanteur du poids K avec cette somme de forces ver-
ticales des puissances P, R , dans le premier cas, ou avec
la différence de ces mêmes forces verticales dans le se-
cond, doit mettre (*Ax. 3.*) ce poids K en équilibre avec
ces deux puissances P, R ; & réciproquement s'il y a équi-
libre entre lui & elle, l'une ou l'autre de ces deux éga-
litez doit (*Ax. 4.*) s'y trouver. Tel est l'usage qu'on vient
de voir des forces verticales suivant AE, AF , des puis-
sances P, R , dans la démonstration du présent Th. 2. &
dans ses Corollaires.

II. Pour ce qui est des forces horisontales de ces mê-
mes puissances P, R , si dans le plan PAR de leurs dire-
ctions, par leur concours A , on fait SV horisontale,
c'est-à-dire (*Déf. 14.*) perpendiculaire à la direction XD
du poids K , laquelle horisontale soit rencontrée en S, V ,
par BS, CV , parallèles à cette direction XD ; on verra
ainsi que dans la démonstration de la part. 3. du Lem. 3.

que les forces horisontales suivant AS , AV , des puissances obliques P , R , sont directement opposées & égales entr'elles : de sorte que n'ayant rien ni pour ni contre le poids K , ne tendant ni à le faire descendre, ni à le faire monter ; tout leur emploi & tout leur usage est de s'empêcher mutuellement par leur égalité & leur directe contrariété de le mouvoir à droit ni à gauche, ainsi qu'on vient de voir (*art. 1.*) que l'égalité & l'opposition directe de la pesanteur de ce poids avec la somme ou avec la différence des forces verticales de ces mêmes puissances obliques P , R , empêche ce poids de monter ni descendre. C'est par ce double empêchement d'aller ni à droit ni à gauche, de monter ni descendre, que se fait le repos & le parfait équilibre de ce poids K avec ces deux puissances P , R .

D E F I N I T I O N X V I I .

Fig. 58.
59.

Si d'un angle quelconque E d'un triangle rectiligne aussi quelconque BEC , sur le milieu H de son côté opposé BC , on mene dans la Fig. 58. une ligne droite EH , laquelle soit divisée de maniere que EA soit double de AH ; ce point A s'appelle d'ordinaire le *centre de gravité* de ce triangle. Et si dans la Fig. 59. la droite FA menée du sommet F d'une pyramide $BECF$ à ce centre de gravité A de sa base BEC , est divisée en G , de maniere que FG soit triple de AG , ce point G s'appelle ordinairement aussi le *centre de gravité* de cette pyramide.

Nous parlerons ici le même langage, sans cependant nous mettre encore en peine si la propriété qu'on attribue à ces deux points A , G , d'être tels (*Déf. 14.*) qu'en quelque situation que le triangle BEC seul, soit appuyé sur le premier A de ces points, & la pyramide $BECF$ sur le second G , ces deux figures y demeureront toujours en équilibre chacune par la seule pesanteur uniforme dans toutes ses parties, d'autres propriétés de ces points A , G , par rapport à cette Section-ci, nous engagent à en parler, & conséquemment à leur donner des noms, ceux-là en valent bien d'autres.

THEOREME III.

I. Si trois puissances P, R, K , appliquées à des cordes seulement, sont en équilibre entr'elles, leurs directions ou cordes PB, RC, KE , prolongées, se rencontreront dans le centre de gravité d'un triangle rectiligne, par les trois angles duquel elles passeront. Fig. 58.

II. Ces cordes ou directions prolongées auront leurs parties comprises entre ce centre de gravité & ces angles, en raison de ces mêmes puissances.

III. Reciproquement trois puissances P, R, K , étant appliquées à trois cordes AP, AR, AK , qui passent par les trois angles B, C, E , d'un triangle rectiligne quelconque BEC , au centre A de gravité duquel soit le nœud qui retient ces trois cordes attachées ensemble; ces trois puissances P, R, K , se soutiendront mutuellement en équilibre en cet état (de leurs cordes) si elles sont entr'elles comme les distances AB, AC, AE , de ce centre A , aux angles B, C, E , par où l'on suppose que leurs directions passent.

DEMONSTRATION.

PART. I. Puisque (*Hyp.*) les trois puissances P, R, K , sont ici en équilibre entr'elles suivant des directions différentes, la part. 1. du Th. I. fait voir que leurs cordes PB, RC, KE , seront en même plan, & que prolongées elles s'y rencontreront toutes trois en un même point quelconque A . Cela étant, sur une d'elles, par exemple, sur KA prolongée soit prise AD à volonté, sur laquelle, comme diagonale, soit fait le parallélogramme $ABDC$, dont les côtes AB, AC , soient sur les deux autres directions AP, AR . Cela fait, si l'on prend $AE = AD$ sur AK , & qu'on mène les droites BC, BE, CE , dont la première BC , rencontre AD en H ; l'on aura $2 \times AH = AD$ (*constr.*) $= AE$. Donc (*Déf. 17.*) le point A est le centre de gravité du triangle BEC . Par conséquent les directions ou cordes prolongées PB, RC, KE , se rencontreront toutes trois dans le centre de gravité A d'un triangle

rectiligne BEC, par les angles B, C, E, duquel elles passeront. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. En ce cas d'équilibre entre les trois puissances P, R, K, la part. 3. du Th. 1. fait voir qu'elles sont entr'elles comme les lignes AB, AC, AD. Mais (*constr.*) $AE=AD$. Donc ces trois puissances P, R, K, sont aussi entr'elles comme les parties AB, AC, AE, de leurs directions, comprises entre le point A (*part. 1.*) centre de gravité du triangle BEC, & les angles B, C, E, de ce triangle, par lesquelles ces directions passent: c'est-à-dire, comme les distances de ce centre de gravité A à ces angles B, C, E. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. Sur KA prolongée vers D soit prise $AD=AE$, laquelle rencontre en H le côté BC du triangle supposé BEC. Le point A étant (*Hyp.*) le centre de gravité de ce triangle, l'on aura (*Déf. 16.*) $BH=HC$, & $AH=\frac{1}{2}AE$ (*constr.*) $=\frac{1}{2}AD$, & conséquemment $AH=HD$.

Donc en menant les droites BD, DC, le quadrilatère ABDC sera un parallélogramme qui aura sa diagonale AD à ses côtés AB, AC, comme AE est à ces mêmes côtés. Mais (*Hyp.*) AE est ici à ces côtés AB, AC, comme la puissance K est aux puissances P, R. Donc ce parallélogramme ABDC aura pareillement ici sa diagonale AD à ses côtés AB, AC, en raison de la puissance K aux deux autres P, R. Donc (*Th. 1. part. 5.*) ces trois puissances K, P, R, seront ici en équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit 3°. démontrer.*

C O R O L L A I R E.

Cette part. 3. jointe au Corol. 4. du Th. 1. fait voir en Géométrie que les distances AB, AC, AE, du centre de gravité A d'un triangle rectiligne quelconque BEC à ses angles B, C, E, sont toujours entr'elles comme les sinus des angles EAC, EAB, BAC, que prolongées elles traverseroient: puisque trois puissances P, R, K, en raison de ces trois distances AB, AC, AE, & appliquées cha-

cune

tune contre les deux autres suivant ces lignes, feroient toujours (*part.* 3.) en équilibre entr'elles; & qu'en ce cas d'équilibre entre ces trois puissances P, R, K , elles feroient aussi toujours entr'elles (*Th.* 1. *Corol.* 4.) comme les sinus de ces mêmes angles EAC, EAB, BAC , que leurs directions ou cordes prolongées traverseroient.

Voilà jusqu'ici pour trois puissances en équilibre avec des cordes seulement, ou pour des poids ainsi soutenus chacun par deux puissances. Voici présentement pour ceux qui le seroient par quelque nombre de puissances quelconques qu'on voudra, & de directions aussi quelconques: le Th. 1. en va encore être le fondement, ainsi qu'il l'a déjà été des deux qui le suivent.

THEOREME IV.

I. Tant de puissances P, Q, R, S , &c. qu'on voudra, F 1 c. 60.
61. 62. 63. dirigées à volonté dans tels plans qu'on voudra aussi, soutenant en équilibre un poids quelconque K avec des cordes seulement attachées ensemble par un nœud commun A (la même chose se dira de chacun des nœuds des cordes qui en ont plusieurs, de chacun desquels partent plusieurs cordons, ou branches de corde) auquel ce poids K est suspendu: l'effort résultant du concours de toutes ces puissances contre ce poids ainsi en équilibre avec elles, sera toujours suivant la direction KA de ce même poids en sens directement contraire, & égal à sa pesanteur.

II. Ce poids K ainsi en équilibre avec toutes ces puissances P, Q, R, S , &c. sera toujours à chacune d'elles en raison de la diagonale du dernier des parallélogrammes faits comme dans le *Corol.* 1. du *Lem.* 10. & dans le *Lem.* 11. à chacune des proportionnelles AB, AC, AE, AF , &c. de ces mêmes puissances.

III. Ce même poids K en équilibre avec toutes ces puissances P, Q, R, S , &c. sera aussi toujours alors à chacune d'elles comme le produit de leur nombre (quel qu'il soit) par la distance de leur centre principal d'équilibre au nœud commun A de toutes leurs cordes, est à chacune des proportionnelles AB, AC, AE, AF , &c. de ces mêmes puissances.

IV. Reciproquement si le poids K est à chacune de ces puissances P, Q, R, S , &c. en quelqu'une des raisons marquées dans les part. 2. 3. & qu'il soit directement contraire à l'effort résultant de leur concours ; il sera en équilibre avec elles.

DEMONSTRATION.

PART. I. Les nomb. 1. 2. 3. du Corol. 2. du Lem. 3. font voir que puisque (*Hyp.*) il y a ici équilibre entre le poids K & l'effort résultant du concours des puissances P, Q, R, S , &c. contre lui ; cet effort doit être directement contraire & égal à la pesanteur de ce poids *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

Fig. 39.
69.

PART. II. Soient (comme dans le Corol. 1. du Lem. 10. & dans le Lem. 11.) les parallelogrammes $ABHC, AHGE, AGDF$, &c. le premier $ABCH$, fait de deux quelconques AB, AC , des proportionnelles aux puissances supposées ; le second $AHGE$, fait de la diagonale AH de celui-ci, & d'une troisième AE quelconque de ces proportionnelles ; le troisième $AGDF$, fait de la diagonale AG de ce second parallelogramme, & d'une quatrième aussi quelconque AF de ces mêmes proportionnelles ; & ainsi de suite en quelque nombre qu'elles soient. Je dis donc que la diagonale du dernier de ces parallelogrammes, par exemple AD , s'il n'y en a que trois, ou que quatre puissances avec le poids, comme ici pour ne pas accabler l'esprit par la multitude des lignes, sera toujours à chacune des proportionnelles AB, AC, AE, AF , des puissances P, Q, R, S , comme le poids K à chacune de ces puissances supposées en équilibre avec lui.

Car (*Lem. 3. Corol. 10.*) l'effort résultant du concours de toutes ces puissances P, Q, R, S , se fait de A vers D , suivant cette dernière diagonale AD , & est à chacune de toutes ces puissances comme cette dernière diagonale AD est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF . Or (*part. 1.*) dans l'équilibre supposé entre le poids K & ces puissances P, Q, R, S , cet effort résultant de leur concours de A vers D suivant AD , est directement

contraire & égal à la pesanteur de ce poids. Donc en ce cas d'équilibre non seulement cette dernière diagonale AD est toujours en ligne droite avec la direction AK de ce poids ; mais encore ce poids K est aussi toujours à chacune des puissances P, Q, R, S, comme cette dernière diagonale AD est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF. La même chose se trouvera de même pour tout autre nombre de puissances ainsi en équilibre avec quelque poids que ce soit. Donc en general un poids ainsi en équilibre avec tant de puissances qu'on voudra, par le moyen de plusieurs cordons issus d'un seul nœud, sera toujours à chacune de ces puissances comme la diagonale du dernier des parallelogrammes faits comme ci-dessus, sera à chacune de leurs proportionnelles. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. Soient encore sur les cordes ou directions AP, AQ, AR, AS, &c. des puissances P, Q, R, S, &c. en équilibre (*Hyp.*) avec le poids K, leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF, &c. Par les extrêmités B, C, de deux quelconques AB, AC, d'entr'elles soit la droite BC, du milieu G de laquelle soit menée GE à l'extrémité E d'une troisième quelconque AE de ces proportionnelles, laquelle GE soit divisée en H, de manière qu'on ait HE. HG :: 2. 1. De ce point H à l'extrémité F de la proportionnelle AF soit aussi menée HF, laquelle soit pareillement divisée en L, de manière qu'on ait LF. LH :: 3. 1. Et ainsi de suite suivant les Corol. 2. 3. 4. du Lem. 11. s'il y avoit ici plus de quatre puissances avec le poids. Le Corol. 5. du même Lemme 11. fait voir que l'effort résultant du concours des quatre puissances P, Q, R, S, sera ici de A vers L suivant AL, & à chacune de ces puissances comme $4 \times AL$ est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF. Donc cet effort devant être ici (*part. 1.*) directement contraire & égal à la pesanteur du poids K (*Hyp.*) en équilibre avec lui ; ce poids K fera pareillement ici à chacune des puissances P, Q, R, S, comme $4 \times AL$ est à chacune de leurs proportion-

FIG. 62.

63.

nelles AB, AC, AE, AF. Or (*Def.* 13.) L est le centre principal d'équilibre de ces quatre puissances P, Q, R, S. Donc le poids K ici (*Hyp.*) en équilibre avec elles, doit non seulement y avoir sa direction KA suivant AL; mais encore y être à chacune de ces puissances P, Q, R, S, comme le produit $4 \times AL$ de leur nomb. 4. par la distance AL de leur centre principal L d'équilibre au nœud commun A de toutes leurs cordes, est à chacune des proportionnelles AB, AC, AE, AF, de ces quatre puissances.

Les Corol. 2. 3. 4. 5. du Lem. 11. qui pour le cas de quatre puissances en équilibre avec un poids donnent ce rapport de $4 \times AL$ à leurs proportionnelles, donneroient de même le rapport de $n \times AL$ aux proportionnelles de tel nombre n de puissances qu'on voudroit ainsi en équilibre avec un poids, & ce poids dirigé suivant AL, si L étoit le centre principal d'équilibre de toutes ces puissances. Donc en general, quelque soit le nombre de puissances dirigées à volonté dans quelque nombre de plans que ce soit, lesquelles soutiennent toutes ensemble en équilibre un poids K aussi quelconque avec des cordes seulement, qui partent toutes d'un même nœud commun A; ce poids ainsi en équilibre avec toutes ces puissances, non seulement aura sa direction suivant la ligne menée de ce point A au centre principal d'équilibre de toutes ces puissances; mais encore il sera toujours alors à chacune d'elles comme le produit de leur nombre par la distance du nœud A à leur centre principal d'équilibre, sera à chacune de leurs proportionnelles. *Ce qu'il falloit 3°. démontrer.*

FIG. 60.
61. 62. 63.

PART. IV. Le poids K étant ici supposé aux puissances P, Q, R, S, &c. appliquées comme ci-dessus en celle qu'on voudra des raisons marquées dans les part. 2. 3. il leur fera (*Lem.* 3. *Corol.* 10. & *Lem.* 11. *Corol.* 5.) en même raison que l'effort résultant de leur concours contre lui; & par conséquent ce poids sera égal à cet effort. Donc ce même poids K étant aussi (*Hyp.*) directement

contraire à ce même effort, il doit (*Ax. 3.*) demeurer en équilibre avec lui; c'est-à-dire, avec les puissances P , Q , R , S , &c. du concours desquelles cet effort résulte. Ce qu'il falloit 4°. démontrer.

COROLLAIRE I.

La part. 2. démontrée en se servant de parallelogrammes, se prouve encore par la part. 3. sans en faire aucun; & reciproquement cette part. 3. démontrée sans parallelogrammes, se prouve aussi par ceux de la part. 2. Car,

1°. Le poids K étant en équilibre comme dans le commencement des démonstrations de ces part. 2. 3. avec les quatre puissances P , Q , R , S , seulement; si l'on prend $AD = 4 \times AL$ sur AL prolongée dans les Fig. 62. 63. cette AD sera (*Lem. 11.*) la diagonale du dernier des parallelogrammes qui auroient été faits en A (comme dans la démonstration de la part. 2.) des proportionnelles AB , AC , AE , AF , de ces quatre puissances P , Q , R , S . Donc suivant la démonstration de la part. 3. cette dernière diagonale AD sera encore ici non seulement en ligne droite avec la direction AK du poids K ; mais aussi à chacune de ces proportionnelles AB , AC , AE , AF , des puissances P , Q , R , S , comme ce poids est à chacune de ces puissances. On le déduira encore de même des Corol. 2. 3. 4. 5. du Lem. 11. pour tout autre nombre de puissances quelconques dirigées à volonté, & supposées ainsi en équilibre avec le poids K . Donc encore en general un poids quelconque ainsi soutenu en équilibre par tant de puissances aussi quelconques qu'on voudra, de directions pareillement quelconques qui rencontrent toutes celle du poids en un même nœud ou point A , sera toujours alors à chacune de ces puissances, comme la diagonale du dernier des parallelogrammes, qui seroient faits en A de la même manière que dans la démonstration de la part. 2. seroit à chacune des proportionnelles de ces mêmes puissances. Ce qui est cette

Fi G. 62.

63.

part. 2. elle-même qu'il falloit ici démontrer par la part. 3. sans faire aucun parallelogramme.

Fig. 60.
61.

2°. Le poids K étant encore en équilibre comme ci-dessus, avec les quatre puissances P, Q, R, S, si l'on prend $AL = \frac{1}{4} AD$ dans les Figures 60. 61. d'où résulte $4 \times AL = AD$; le point L ainsi pris sur la dernière diagonale AD, sera (Déf. 12) le centre principal d'équilibre de ces quatre puissances; & conséquemment AL sera la distance de ce centre au nœud ou concours A de leurs quatre directions avec celle du poids. Or (part. 2.) ce poids K ainsi en équilibre avec ces quatre puissances P, Q, R, S, est à chacune d'elles comme cette dernière diagonale AD est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF. Donc ce poids K sera aussi pour lors à chacune de ces puissances P, Q, R, S, comme $4 \times AL$ (produit de leur nombre 4. par la distance AL de leur centre principal d'équilibre au point A de concours de leurs directions) sera à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF. On le trouvera de même pour tout autre nombre de puissances ainsi en équilibre avec quelque poids que ce soit. Donc en general ce poids ainsi en équilibre avec toutes ces puissances quelconques, & de directions quelconques qui rencontrent toutes celle de ce poids en un même nœud ou point A, sera toujours à chacune de ces puissances, comme le produit de leur nombre par la distance de ce point A à leur centre principal d'équilibre, sera à chacune de leurs proportionnelles. Ce qui est la partie 3. qu'il falloit ici démontrer par la part. 2. en y employant des parallelogrammes.

COROLLAIRE II.

Il suit de la part. 4. que tant de puissances données qu'on voudra, appliquées à autant de cordes retenues ensemble par un seul nœud commun, peuvent demeurer en équilibre entr'elles suivant une infinité de directions différentes pour toutes & pour chacune, excepté lorsqu'il n'y en a que trois ou deux seulement.

Car en prenant le poids K pour une puissance égale à sa pesanteur, afin de faire servir ici les Fig. 60. 61. la part. 4. fait voir que quelque soit le nombre des puissances données P, Q, R, S, &c. appliquées à autant de cordes attachées ensemble par un seul nœud commun A; toutes ces puissances seront toujours en équilibre entre-elles tant qu'une d'elles sera à toutes les autres comme la diagonale du dernier des parallelogrammes faits (ainsi que dans la démonstration de la part. 2.) de leurs proportionnelles sera à ces mêmes proportionnelles, & qu'elle sera dirigée suivant cette diagonale à contre-sens de l'impression résultante de toutes ces autres puissances. Or pour peu d'attention qu'on fasse à la démonstration de la part. 2. on verra que cela peut arriver dans une infinité de directions différentes de toutes ces puissances, & de chacune d'elles: voici comment.

De toutes ces puissances données P, Q, R, S, K, &c. moins deux quelconques S, K, soient les directions AP, AQ, AR, &c. telles qu'on voudra, & dans quels plans on voudra, avec les proportionnelles AB, AC, AE, &c. des puissances P, Q, R, &c. qu'on destine à ces directions. De deux quelconques AB, AC, de ces proportionnelles soit fait le parallelogramme BACH; de sa diagonale AH, & d'une troisième quelconque AE de ces mêmes proportionnelles, soit fait ensuite le parallelogramme HAEG; & toujours de même jusqu'à la dernière inclusivement des puissances qu'on vient de diriger à volonté, laquelle soit ici R. Sur la diagonale AG du dernier de ces parallelogrammes soit dans tel plan qu'on voudra qui passe par elle, un triangle ADG dont les deux côtes GD, AD, soient chacun à AB, comme chacune des deux puissances S, K, réservées pour les dernières, est à la puissance P. Soient enfin la puissance S dirigée suivant AS parallèle à GD, & la puissance K suivant DA prolongée vers K.

Cela fait, il suit de la part. 4. que toutes ces puissances P, Q, R, S, K, ainsi dirigées sont en équilibre entre-

elles ; puis que si l'on mène DF parallèle à AG , & qui rencontre AS en F , cette construction donnera la puissance K dirigée suivant DA , est à chacune des autres P , Q , R , S , comme cette diagonale AD du dernier AGDF des parallelogrammes ici faits , est à chacune de leurs proportionnelles AB , AC , AE , AF . Ce nombre arbitraire de puissances données fait voir qu'il en sera de même de tout autre nombre de puissances quelconques aussi données . Donc les directions de celles-là ayant été prises arbitrairement , à la reserve de deux qu'on voit devoir varier avec elles ; ces mêmes puissances P , Q , R , S , K , peuvent ainsi faire équilibre entr'elles suivant une infinité de directions différentes pour toutes & pour chacune d'elles . Leur nombre aussi arbitraire fait pareillement voir qu'il en sera de même de tout autre nombre de puissances données quelconques , pourvu (*Schol. du Th. 1.*) qu'il ne soit pas moindre que quatre .

Il est à remarquer que la disposition des directions arbitraires doit ici être telle que la penultième diagonale AG soit moindre que la somme des proportionnelles GD , AD , des deux puissances restantes S , K , & assez grande pour faire avec chacune de ces deux dernières proportionnelles une somme plus grande que l'autre de ces mêmes proportionnelles : autrement le triangle AGD seroit impossible , & conséquemment aussi l'équilibre , à l'établissement duquel il vient de nous conduire . Mais cela n'empêche pas que les puissances données P , Q , R , S , K , ne puissent être encore en équilibre entr'elles suivant une infinité de directions différentes , ainsi que dans le precedent Corol. 2 . Puisqu'une infinité de directions arbitraires des puissances P , Q , R , peuvent rendre AG , telle qu'on ait à la fois $AG < GD + AD$, $AG + GD > AD$, & $AG + AD > GD$, en une infinité de rapports differens ; n'y ayant pour cela qu'à ouvrir plus ou moins les angles que ces directions arbitraires feront entr'elles , ou à n'appliquer suivant ces directions que des puissances dont la somme soit plus grande que la difference des deux réservées pour les dernières , ou enfin à faire (si l'on veut) les deux ensemble . Il en sera de même de

tel autre nombre de puissances quelconques qu'on voudra, plus grand que trois.

COROLLAIRE III.

Ce qu'on vient de voir de la part. 4. dans le précédent Corol. 2. sur les Fig. 60. 61. par la voye des parallelogrammes qu'on a tenue dans la démonstration de la part. 2. se peut encore déduire de cette même part. 4. sur les Fig. 62. 63. sans parallelogrammes, en suivant la voye qu'on a tenue dans la démonstration de la part. 3.

Car si après avoir encore conduit à volonté dans des plans quelconques les direction AP, AQ, AR, &c. de toutes les puissances données P, Q, R, S, K, &c. à la reserve de celles AS, AK, de deux quelconques S, K, de ces puissances, & avoir pris sur ces directions arbitraires AP, AQ, AR, &c. depuis leur concours A, des parties AB, AC, AE, &c. proportionnelles aux puissances P, Q, R, &c. qu'on leur destine; soit menée par les extrêmités B, C, de deux quelconques AB, AC, de ces proportionnelles, la droite BC; du milieu G de cette ligne soit ensuite menée à l'extrêmité E d'une troisième quelconque AE de ces mêmes proportionnelles, une seconde droite GE, laquelle soit divisée en H, de maniere qu'on ait EH. HG:: 2. 1. De ce point H à l'extrêmité d'une quatrième quelconque de ces proportionnelles soit menée de même une troisième droite, laquelle soit divisée en deux parties telles que celle du côté de cette quatrième proportionnelle soit à l'autre du côté de G:: 3. 1. ainsi que dans la démonstration de la part. 3. conformément aux Corol. 2. 3. 4. du Lem. 11. quelque nombre de puissances données quelconques qu'on suppose jusqu'à la dernière de celles qu'on aura dirigées à volonté, laquelle est ici R. Ensuite suivant le Lem. 14. soient du point A menées dans quelque plan que ce soit, les lignes $AF = \frac{S}{P} \times AB$, $AL = \frac{K}{P} \times \frac{AB}{4}$, de maniere que la droite HF menée de H à l'extrêmité F de ces deux-là soit divisée en

L par la seconde AL, en parties FL, LH, telles qu'on ait FL. LH :: 3. 1. Ce qui est facile par le Lem. 14. Après cela soient dirigées suivant AF, & suivant LA prolongée vers K, les deux puissances S, K, réservées ci-dessus pour les dernières.

Il est visible que cette construction donnera non seulement AB, AC, AE, AF, $4 \times AL$, en raison des puissances P, Q, R, S, K, dirigées suivant ces lignes; mais encore BG=GC, avec EH. HG :: 2. 1. Et FL. LH :: 3. 1. ainsi que dans la démonstration de la part. 3. Donc (part. 4.) toutes ces puissances seront ici en équilibre entr'elles: de plus les directions arbitraires de toutes, excepté des deux dernières S, K, dont les directions doivent varier avec celles-là, font voir aussi que cet équilibre peut arriver avec une infinité de directions différentes de ces mêmes puissances. Il en sera de même de tel autre nombre de puissances données quelconques qu'on voudra, pourvû (*Schol. du Th. 1.*) qu'il ne soit pas moindre que quatre, le nombre & le rapport de celles-ci entr'elles étant pareillement arbitraire jusques-là.

Si l'on prend m pour cet autre nombre de puissances données aussi quelconques plus grand d'une unité que celui n des nomb. 1. 2. du Corol. 4. du Lem. 11. & encore S, K, pour les deux dernières réservées comme ci-dessus; le nomb. 2. du Corol. 4. du Lem. 11. fait voir

qu'il faudroit alors $AL = \frac{K}{P} \times \frac{AB}{m-1}$, & diviser la ligne HF

en L, de maniere qu'on eût FL. LH :: $m-2$. 1. Ce qui dans l'exemple précédent de cinq puissances, donneroit

$AL = \frac{K}{P} \times \frac{AB}{5-1} = \frac{K}{P} \times \frac{AB}{4}$, & FL. LH :: $5-2$. 1 :: 3. 1. ainsi

qu'on les y vient de faire.

Si l'on fait ici la remarque qu'on a faite à la fin du Corol. 2. on verra derechef que s'il y a des directions suivant lesquelles les puissances proposées ne demeureroient pas en équilibre entr'elles, il ne laisse pas d'y en avoir encore une infinité suivant lesquelles ces mêmes puissances y demeureroient.

COROLLAIRE IV.

La part. 4. du présent Th. 4. donne encore le reciproque des deux précédens Corol. 2. 3. sçavoir, que tant de puissances quelconques qu'on voudra au-dessus de trois, successivement appliquées à autant de cordes attachées ensemble par un seul nœud commun, & de directions données à volonté, peuvent être entr'elles dans une infinité de rapports differens, & cependant faire toujours équilibre suivant ces mêmes directions, pourvu (*Lem. 17. Corol. 2.*) que ces directions soient répandues en plus d'un demi-cercle ou d'une demi-sphere, dont le nœud commun de ces cordons soit le centre, & que pour le cas de quatre cordons leurs directions données soient toutes en même plan: tous les autres cas de plus de quatre cordons les auront en tels plans qu'on voudra, ainsi qu'on le verra dans le Prob. de la Sect. IX. avec les précautions qu'il faut prendre pour trouver ce dont il s'agit ici, lesquelles nous y engageroient à une trop grande digression: c'est pour cela que nous n'y allons parler que de directions données quelconques en même plan au dessus de trois, & répandues en plus d'un demi-cercle, soient donc, par exemple, dans les Fig. 60. 61. en même plan, & répandues en plus d'un demi-cercle les directions données AP, AQ, AR, AS, AK, suivant lesquelles les cinq puissances P, Q, R, S, K, soient en équilibre entr'elles; la part. 4. fait voir, dis-je, qu'une infinité d'autres puissances cinq à cinq peuvent encore être successivement en équilibre entr'elles suivant ces mêmes directions, quoique ces nouvelles puissances de chaque fois cinq, soient entr'elles dans des rapports tout differens de ceux de celles-là, & de toute autre fois cinq.

Pour le voir, sur une quelconque des directions données, par exemple, sur KA prolongée vers D, soit prise AD à volonté, & de même AF à volonté sur telle autre AS qu'on voudra de ces directions données; soit le parallélogramme AFDG, dont AD soit la diagonale; de

même ayant pris AE à volonté sur une troisième quelconque AR de ces directions, soit achevé le parallélogramme $AEGH$, dont AG soit la diagonale. Enfin (puisque'il n'y a ici que cinq directions données) sur les deux autres directions AP , AQ , soient menées les droites HB , HC , qui leur soient réciproquement parallèles, & qui avec elles fassent le parallélogramme $BACH$, dont AH soit la diagonale.

Cela fait, la part. 2. fait voir que si l'on applique aux directions données AP , AQ , AR , AS , AK , autant de puissances P , Q , R , S , K , qui soient entr'elles comme AB , AC , AE , AF , AD ; toutes ces puissances ainsi dirigées seront en équilibre entr'elles. Donc toutes ces proportionnelles (hors AC , AB , qui doivent varier avec les autres) étant arbitraires dans la construction précédente; toutes les puissances P , Q , R , S , K , le sont aussi, hors les deux premières P , Q , qui doivent varier avec les autres. Donc une infinité de puissances cinq à cinq, de rapports tout différens, peuvent faire successivement équilibre entr'elles suivant les mêmes cinq directions données AP , AQ , AR , AS , AK ; & ainsi de tout autre nombre de directions données, & conséquemment aussi de puissances successivement requises, excepté s'il n'y en avoit que trois; car le Th. I. fait voir que s'il n'y avoit que trois directions, ou que trois cordes de directions données, le rapport des trois puissances requises pour faire équilibre entr'elles suivant ces trois directions, seroit aussi donné, & conséquemment invariable.

COROLLAIRE V.

La même chose que dans le précédent Corol. 4. se peut encore déduire de la part. 4. sans faire aucun parallélogramme. Pour cela sur une quelconque des cinq directions données AP , AQ , AR , AS , AK , par exemple, sur KA prolongée du côté A , soit prise AL à volonté, & encore AE , AF , à volonté sur deux autres quelconques AS , AR , des quatre directions restantes; soit la

droite FL prolongée vers H de maniere qu'on ait FL. HL :: 3. 1. n'y ayant ici (*Hyp.*) que cinq directions données: le nomb. 1. du Corol. 4. du Lem. 11, auquel il y auroit ici une puissance à ajouter opposée à l'impression resultante du concours de toutes les autres, fait voir que s'il y en avoit ici tel autre qu'on voudra, fait de l'unité ajoutée au nombre quelconque n de toutes celles-là, il y faudroit FL. LH :: $m-2$. 1. Puisque le nombre de toutes ces puissances ensemble étant $m=n+1$. donne $m-2=n-1$. Après cela menez EH prolongée vers G, de maniere que vous ayez EH. HG :: 2. 1. Enfin par le point G menez (*Lem.* 13.) la droite BC telle que ce point G la divise en deux parties égales.

Cela fait, la part. 4. du present Th. 4. fait voir que si l'on applique aux directions données AP, AQ, AR, AS, AK, qui soient entr'elles comme AB, AC, AE, AF, $4 \times AL$; toutes ces puissances seront en équilibre entre-elles. Donc toutes ces proportionnelles AB, AC, AE, AF, $4 \times AL$ (hors AB, AC, qui doivent varier avec les autres) étant arbitraires dans la construction précédente, toutes les puissances P, Q, R, S, K, le sont aussi, hors les deux premières P, Q, qui doivent varier avec les autres. Donc une infinité de puissances cinq à cinq, de rapports tout differens, peuvent successivement faire équilibre entr'elles suivant les mêmes cinq directions données au dessus de trois, & consequemment aussi de puissances successivement requises, ainsi qu'on l'a déjà vû dans le précédent Corol. 4.

COROLLAIRE VI.

Les quatre derniers Corollaires 2. 3. 4. 5. font voir que non seulement tant de puissances données qu'on voudra au dessus de trois, appliquées à autant de cordes attachées ensemble par un nœud commun, peuvent demeurer en équilibre entr'elles suivant une infinité de directions differentes pour toutes & pour chacune, mais encore que si les directions de ces cordes sont données

répandues en plus d'un demi-cercle ou d'une demi-sphère, dont ce nœud commun soit le centre: les puissances qui y seront successivement appliquées, peuvent être entr'elles en une infinité de rapports differens, & cependant faire toujours équilibre entr'elles suivant ces mêmes directions, excepté lorsqu'il n'y en a que quatre en plus d'une demi-sphère: le premier se voit dans les Corol. 2. 3. le second dans les Corol. 4. 5. de sorte que suivant ces quatre Corollaires tant de puissances données qu'on voudra au dessus de trois, peuvent faire équilibre entr'elles suivant autant de directions variées à l'infini; & reciproquement tant de directions qu'on voudra étant données répandues en plus d'un demi-cercle ou d'une demi-sphère, autant de puissances de rapports varieés à l'infini, peuvent faire équilibre entr'elles suivant ces mêmes directions, excepté lorsqu'il n'y en a que quatre en plus d'une demi-sphère, le rapport des puissances étant invariable en ce cas, ainsi qu'on le verra dans le Probl. 9. de la Section I.

COROLLAIRE VII.

FIG. 64.

Si l'n'y a que trois puissances P, Q, R , qui résistent au poids K avec trois cordes seulement AP, AQ, AR , dirigées à volonté suivant differens plans, du nœud commun A de ces cordes auquel est aussi attachée celle du poids K , soient prises sur elles des parties AB, AC, AE , proportionnelles à ces trois puissances P, Q, R , qui leur sont appliquées; de ces trois proportionnelles AB, AC, AE , comme côtez, soit fait le parallelepiped $BACFDHEG$, avec sa diagonale AD .

1°. Il suit de la part. 1. de ce Théoreme-ci, que si le poids K demeure ainsi en équilibre avec les trois puissances P, Q, R , l'effort resultant du concours de ces trois puissances sera toujours suivant la direction KA de ce poids en sens contraire, & égal à sa pesanteur. Mais le parallelogramme $ABFC$ étant (*Hyp.*) fait de deux AB, AC , des trois proportionnelles AB, AC, AE ; & le paral-

lelogramme AEDF fait ensuite (*Hyp.*) de la diagonale AF de celui-là, & de la troisième proportionnelle AE; cet effort résultant du concours des trois puissances P, Q, R, contre le poids K, doit se faire (*Lem. 3. Corol. 10.*) de A vers D suivant la diagonale AD de ce dernier parallélogramme & tout à la fois du parallélépipède BACFDHEG, doit (en cas d'équilibre entre le poids K & les trois puissances P, Q, R,) être en ligne droite avec la direction AK du poids K, c'est-à-dire, qu'alors cette direction KA prolongée doit passer par l'angle D de ce parallélépipède.

2°. Il suit aussi de la part. 2. de ce Théoreme-ci, qu'en ce cas d'équilibre entre le poids K & les trois puissances P, Q, R, ce poids doit être à chacune de ces puissances, comme la diagonale AD du parallélépipède BACFDHEG est à chacun de ses trois côtes AB, AC, AE, pris (*Hyp.*) sur les directions de ces trois puissances; puisque l'effort résultant de leur concours contre ce poids, lui (*nomb. 1.*) est égal, & est (*Lem. 3. Corol. 10.*) en cette raison à chacune de ces trois puissances.

3°. Il suit réciproquement de la part. 3. de ce Théoreme-ci, que si la diagonale AD du dernier des deux parallélogrammes ABFC, AFDE, ou du parallélépipède BACFDHEG, est en ligne droite avec la direction AK du poids K, c'est-à-dire, si cette direction KA prolongée passe par l'angle D de ce parallélépipède, & que ce poids soit à chacune de ces trois puissances P, Q, R, comme la diagonale AD de ce même parallélépipède est à chacun de ses trois côtes AB, AC, AE, pris sur leurs directions; ces trois puissances soutiendront ensemble ce poids en équilibre avec elles: puisque (*nomb. 1.*) l'effort résultant de leur concours contre ce poids, lui sera directement contraire & égal.

COROLLAIRE VIII.

Les trois puissances P, Q, R, tirant encore contre le poids K comme dans le précédent Corol. 7. avec des directions quelconques dans des plans différens, sur lesquel-

Fig. 65.

les depuis le point A de leur concours, soient encore prises AB, AC, AE, AD, proportionnelles à ces puissances P, Q, R, & à ce poids K.

1°. En cas d'équilibre entr'elles & lui, sa direction passera par le centre de gravité de la base BCE d'une pyramide triangulaire BCED, qui aura ses quatre angles B, C, E, D, aux extrêmités des proportionnelles AB, AC, AE, AD, de ces trois puissances P, Q, R, & du poids K. Car si l'on mène la droite EF par le milieu F de BC, le Corol. 5. du Lem. 11. fait voir que l'effort résultant du concours de ces trois puissances P, Q, R, doit se faire suivant une ligne AG, qui divise EF en G de manière qu'elle rende $EG : GF :: 2 : 1$. c'est-à-dire (Déf. 17.) en un point G, qui soit le centre de gravité de la base BCE de la pyramide BCED. Mais en cas d'équilibre entre le poids K & les trois puissances P, Q, R, la direction AK de ce poids, doit être (part. 1.) en ligne droite avec la direction AG de l'effort résultant du concours de ces mêmes puissances. Donc cette direction KA ou DA prolongée du poids K, doit alors aussi passer par le centre de gravité G de la base BCE de la pyramide BCED, & conséquemment aussi (Déf. 17.) par le centre de gravité de cette pyramide elle-même.

2°. En ce cas d'équilibre le nœud ou point commun A des quatre cordes ou directions AP, AQ, AR, AK, des puissances P, Q, R, & du poids K, sera dans le centre de gravité de cette pyramide BCED. Car la part. 3. fait voir qu'en ce cas d'équilibre entre le poids K & les puissances P, Q, R, ce poids est à chacune d'elles comme $3 \times AG$ est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE. Mais (Hyp.) ce poids est aussi à chacune de ces puissances, comme AD est à chacune de ces mêmes proportionnelles correspondantes. Donc en ce cas d'équilibre l'on aura $AD = 3 \times AG$; & conséquemment la droite DG sera divisée en A de manière qu'on aura $AD : AG :: 3 : 1$. Donc cette droite passant aussi pour lors (nombr. 1.) par le centre de gravité de la base BEC de la pyramide BECD,

le

le point A fera alors (*Déf. 7.*) le centre de gravité de cette pyramide elle-même.

3°. Reciproquement si le nœud ou point commun A des cordes ou directions des puissances P, Q, R, & du poids K, est le centre de gravité de cette pyramide BECD; & que ces trois puissances & ce poids soient entr'eux comme les distances AB, AC, AE, AD, de ce centre A aux angles B, C, E, D, de cette pyramide; ces puissances P, Q, R, & ce poids K, dirigées suivant ces lignes, seront en équilibre entr'eux. Car si A est le centre de gravité de la pyramide BCED, l'on aura (*Déf. 17.*) non seulement $AD : AG :: 3 : 1$. mais encore $EG : GF :: 2 : 1$. Et $BF = FC$. Ce qui fait voir que non seulement on aura ici $AD = 3 \times AG$; mais encore que G y fera (*Déf. 13.*) le centre principal d'équilibre des puissances P, Q, R, entr'elles. Or (*Hyp.*) le poids K est à chacune de ces puissances P, Q, R, comme AD est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE. Donc ce poids est aussi à chacune de ces trois puissances comme $3 \times AG$ à chacune de ces mêmes proportionnelles correspondantes. Donc la direction AK ou AD étant ici (*Hyp.*) en ligne droite avec AG, & G étant le centre principal d'équilibre de ces trois puissances P, Q, R, entr'elles, ce poids K doit ici (*part. 4.*) demeurer en équilibre avec elles.

Cela se peut encore démontrer indépendamment de la part. 4. Car puisque l'hypothese donne ici $EG : GF :: 2 : 1$. & $BF = FC$, avec AB, AC, AE, proportionnelles aux trois puissances P, Q, R, agissantes suivant ces lignes; l'effort résultant de leur concours, sera (*Lem. 11. Corol. 5.*) de A vers G suivant AG, & à chacune d'elles comme $3 \times AG$ à chacune de leurs proportionnelles correspondant es. Mais le poids K est aussi (*Hyp.*) à chacune de leurs trois puissances P, Q, R, comme AD est à chacune de ces mêmes proportionnelles AB, AC, AE; & de plus l'hypothese vient de donner $AD = 3 \times AG$. Donc ce poids est ici égal à l'effort suivant AG, résultant du concours des trois puissances P, Q, R, Donc la

direction AK ou AD de ce poids étant ici (*Hyp.*) en ligne droite avec la direction AG de cet effort en sens contraire ; ce poids K doit ici (*ax. 4.*) demeurer en équilibre avec cet effort, c'est-à-dire, avec les trois puissances P, Q, R, du concours d'action desquelles cet effort résulte.

4°. Reciproquement encore si trois puissances quelconques P, Q, R, & un poids K aussi quelconque, sont équilibre entr'eux suivant autant de cordes ou directions AP, AQ, AR, AK, qui du centre A de gravité de quelque pyramide triangulaire BCED que ce soit, passent par les quatre angles B, C, E, D, de cette pyramide ; ces trois puissances P, Q, R, & ce poids K seront entr'eux comme les distances correspondantes de ce centre A à ces quatre angles. Car si cela n'étoit pas, soit (si l'on veut) le poids K aux puissances P, Q, R, comme AD à AL, AM, AN, quels que soient ces rapports. Le nomb. 1. fait voir que dans le cas présent d'équilibre entre ce poids & ces trois puissances, le nœud ou concours A de leurs cordes ou directions, se trouveroit au centre de gravité d'une pyramide triangulaire, qui auroit ses quatre angles ou les quatre pointes aux extrêmités D, L, M, N, de ces quatre proportionnelles. Mais on suppose ici ce nœud ou concours A des cordes ou directions des puissances P, Q, R, & du poids K, au centre de gravité de la pyramide BCED. Donc ces deux pyramides auroient le même centre de gravité A, & la même pointe D ; ce que la Déf. 17. fait voir aux moindres Géomètres être impossible. Par conséquent dans la présente hypothèse d'équilibre entre les trois puissances P, Q, R, & le poids K, suivant des directions qui du centre de gravité A de la pyramide BCED passent par les quatre angles de cette pyramide ; il est pareillement impossible que ces trois puissances P, Q, R, & ce poids K, ne soient pas entr'eux comme les distances correspondantes AB, AC, AE, AD, de ce centre à ces angles.

COROLLAIRE IX.

Les Corol. 2. 3. 7. font voir en Géométrie qu'il peut y avoir une infinité de parallelepipèdes, dont les trois côtez contigus & la diagonale qui part du concours ou de l'angle solide fait des trois plans qui passent par ces trois côtez, seroient les mêmes dans tous. Car les puissances P, Q, R, K, supposées en raison des grandeurs données AB, AC, AE, AD, pouvant avoir une infinité de directions différentes AP, AQ, AR, AK, en differens plans, & cependant (Corol. 2. 3.) faire toujours équilibre entr'elles sur le point A concours ou nœud de ces directions ou de ces cordes, sur lesquelles sont données les proportionnelles AB, AC, AE, AD; trois quelconques AB, AC, AE, de ces quatre proportionnelles pourroient être les côtez d'une infinité de parallelepipèdes BACFDGEH differens selon la variété infinie des angles qu'elles feroient alors entr'elles autour du point A dans differens plans: de sorte qu'alors la puissance K seroit aux trois autres P, Q, R, comme la quatrième proportionnelle AD seroit à ces trois côtez AB, AC, AE, de chacun de tous ces parallelepipèdes. Mais cette puissance K seroit aussi pour lors (Corol. 7. nomb. 2.) à ces trois autres P, Q, R, comme la diagonale qui passeroit par l'angle A de chacun de tous ces parallelepipèdes, seroit à ces trois côtez AB, AC, AE, les mêmes pour tous. Donc la diagonale par A seroit dans tous égale à AD; & conséquemment ils auroient tous la même diagonale & les mêmes côtez par ce point A. Ce qu'on voit de la proportionnelle AD par rapport aux trois autres AB, AC, AE, se démontrera de même de chacune de celles-ci par rapport à celle-là & aux deux autres. Donc il peut effectivement y avoir une infinité de parallelepipèdes, dont les trois côtez contigus, & la diagonale qui passe par leur concours ou angle solide, seroient les mêmes dans tous, quelle que soit celle de ces quatre lignes

données, qu'on veuille en être la diagonale commune qui passe par le concours des trois autres.

C O R O L L A I R E X.

Fig. 65.

Les Corol. 2. 3. 8. font voir de même en Géométrie qu'il peut aussi y avoir une infinité de pyramides triangulaires différentes, qui aient toutes les mêmes distances de leurs quatre angles à leur centre de gravité, quelles que soient ces quatre distances données. Car les quatre puissances P, Q, R, K , supposées en raison de AB, AC, AE, AD , pouvant avoir une infinité de directions différentes, & cependant (Corol. 2. 3.) faire toujours équilibre entr'elles; c'est-à-dire, leurs quatre cordes ou directions AP, AQ, AR, AK , pouvant faire entr'elles une infinité d'angles differens en differens plans autour de leur nœud ou point commun A , sans cependant empêcher ces quatre puissances P, Q, R, K , de faire équilibre entr'elles; leurs mêmes proportionnelles AB, AC, AE, AD , prises sur ces directions depuis ce point A , alors fixe & immobile, pourroient alors se terminer aux quatre angles de chacune d'une infinité de pyramides $BCED$ différentes selon la variété infinie de ces angles autour de ce point A . Ainsi il pourroit y avoir une infinité de telles pyramides dont chacune auroit alors ces quatre proportionnelles de longueurs données, pour distances des quatre angles à ce point A . Mais (Corol. 8. nomb. 2.) ce point A seroit aussi pour lors le centre de gravité de chacune de toutes ces pyramides. Donc il peut y avoir une infinité de pyramides triangulaires différentes, lesquelles aient cependant toutes les mêmes distances AB, AC, AE, AD , de leurs quatre angles à leur centre de gravité.

S C H O L I E.

A l'occasion des deux derniers Corol. 9. 10. voici presentement comment la Géométre seule prouve encore ce que la Mécanique vient d'y donner. Voici, dis-je,

comment on peut construire une infinité de parallelepipeds, qui ayent tous les mêmes côtez contigus avec la même diagonale menée par le concours de ces côtez ; & une infinité de pyramides triangulaires , qui ayent toutes les mêmes distances de leurs quatre angles à leur centre de gravité.

I. Pour construire une infinité de parallelepipeds differens , dont les trois côtez contigus , & la diagonale menée par leur point de concours ou angle solide , soient cependant les mêmes dans tous , par exemple , égaux dans chacun d'eux tous à quatre lignes données de grandeur V, X, Y, Z , soit un angle rectiligne quelconque BAC , dont les côtez BA, AC , soient pris égaux à deux quelconques V, X , de ces quatre lignes données ; après en avoir fait le parallelogramme $BACF$, soit sur la diagonale AF , dans un autre plan quelconque un triangle ADF , dont les côtez FD, AD , soient égaux aux deux autres Y, Z , de ces mêmes lignes données ; soient enfin achevez les parallelogrammes $AFDE, EACG, DFCG, DFBH$. Fig. 64.

Cela fait , il est visible que l'on aura un parallelepiped $BACFDGEH$, dont les trois côtez contigus AB, AC, AE , seront égaux aux trois lignes données V, X, Y , & la diagonale AD égale à la quatrième Z de ces mêmes lignes données. On voit de plus que la variabilité infinie de son angle arbitraire BAC , & consequemment aussi de ses autres angles, le peut varier à l'infini, sans en varier les côtez AB, AC, AE , ni la diagonale AD , c'est-à-dire, ces quatre lignes y demeurant toujours égales aux quatre données V, X, Y, Z , chacune à chacune. Donc on peut ainsi faire une infinité de parallelepipeds differens qui auront tous les mêmes côtez contigus , & la même diagonale menée par le concours de ces côtez ; & même ces quatre lignes égales dans tout à quatre données quelconques.

II. Pour construire aussi une infinité de pyramides triangulaires differentes, dont les distances de leur cen-

Fig. 66.

67

tre de gravité à leurs quatre angles, soient néanmoins les mêmes dans toutes, par exemple, égales dans toutes ces pyramides à quatre lignes quelconques données V, X, Y, Z ; soit encore à volonté un angle rectiligne quelconque BAC , dont les côtes BA, AC , soient pris égaux à deux quelconques V, X , des quatre lignes données; après en avoir fait encore le parallélogramme $BACF$, soit encore aussi sur sa diagonale AF dans un autre plan quelconque le triangle ADF , dont les côtes FD, AD , soient égaux aux deux autres Y, Z , de ces quatre lignes données; enfin après avoir achevé le parallélogramme $AFDE$, soit prise $AK=AD$ sur sa diagonale DA prolongée du côté de K .

Cette construction, suivant laquelle on voit que la pyramide triangulaire $BCEK$, dont les quatre angles seront en B, C, E, K , aura les quatre lignes AB, AC, AE, AK , égales aux quatre données V, X, Y, Z , donne aussi A pour le centre de gravité de cette pyramide. Car si l'on mène la droite BC , & par son milieu H encore une autre droite EH , laquelle rencontre en G la diagonale AD ; les triangles DGE, ADH , que le parallélogramme $AFDE$ rend semblables, donneront $EG. GH :: DE. AH :: AF. AH :: 2. 1.$ Donc ayant déjà (*Hyp.*) $BH=CH$, le point G fera (*Déf. 16.*) le centre de gravité de la base BCE de la pyramide $BCEK$; & conséquemment (*Déf. 17.*) le centre de gravité de cette pyramide elle-même, fera dans la droite GK . Or les triangles (*constr.*) semblables DGE, ADH , donnent aussi $DG. AG :: DE. AH :: AF. AH :: 2. 1.$ Et (en composant) $AD. AG :: 3. 1.$ Mais (*constr.*) $AK=AD$. Donc aussi $AK. AG :: 3. 1.$ Par conséquent ayant déjà G pour le centre de gravité de la base BCE de la pyramide $BCEK$, le point A fera aussi (*Déf. 17.*) le centre de gravité de cette pyramide elle-même. Donc les distances AB, AC, AE, AK , de ce point A aux quatre angles B, C, E, K , de cette pyramide ayant déjà été trouvées égales aux quatre lignes données V, X, Y, Z ; les distances de son centre de gravité à ces quatre an-

gîes, seront égales à ces mêmes lignes données chacune à chacune. Or il est manifeste que la variabilité infinie de l'angle arbitraire BAC, laquelle (*constr.*) doit en produire de pareilles dans tous les angles qu'on voit autour du point A, sans rien changer aux distances AB, AC, AE, AK de lui aux quatre angles de la pyramide BCEK, doit aussi varier cette pyramide à l'infini, sans rien changer aux distances de ses angles B, C, E, K, à son centre A de gravité. Donc on peut ainsi faire une infinité de pyramides triangulaires, qui auront toutes les mêmes distances de leur centre de gravité à leurs quatre angles, & ces distances toujours égales à quatre lignes données quelconques, chacune à chacune.

III. Il est vrai que pour les constructions précédentes (*art.* 1. 2.) il faut que la diagonale AF se trouve toujours moindre que la somme des lignes FD, AE, c'est-à-dire, moindre que $FD + AD$, ou (*constr.*) $Y + Z$; autrement le triangle ADF seroit impossible, & conséquemment aussi les parallelepipèdes & les pyramides des *art.* 1. 2. Mais cela n'empêche pas qu'il n'en reste encore une infinité de possibles; l'accroissement continuel de l'angle arbitraire BAC pouvant diminuer à l'infini cette diagonale AF jusqu'à la rendre plus petite en une infinité de rapports que $FD + AD$, à moins que la différence de AB, AC, ne fut égale ou plus grande que cette somme: auquel cas il n'y auroit qu'à prendre ces côtez AB, AC, de l'angle initial arbitraire BAC, égaux aux deux moindres des quatre lignes données; ou plutôt il n'y auroit qu'à les prendre toujours ainsi, & alors les parallelepipèdes & les pyramides des *art.* 1. 2. seront toujours possibles & differens à l'infini selon la variabilité infinie de cet angle arbitraire BAC, laquelle pourra rendre AF toujours plus petite à l'infini que $FD + AD$ égale (*Hyp.*) à la somme des deux plus grandes des quatre lignes données.

IV. Pour la même raison si les puissances P, Q, R, S, K, &c. appliquées aux cordes AP, AQ, AR, AS, AK,

Fig. 64.
66. 67.

Fig. 68.
69.

&c. dans les Fig. 60. 61. du présent Th. 4. étoient données en raison des parties quelconques AB, AC, AE, AF, AD, &c. de ces cordes, & qu'il s'agit de les diriger de maniere à mettre toutes ces puissances en équilibre entr'elles : quoiqu'on y pût réussir en prenant au hazard AB, AC, pour en faire le premier parallélogramme BACH; ensuite AE encore au hazard pour en faire avec AH le second parallélogramme HAEG; & ainsi des autres : il seroit cependant plus sûr, & même il le seroit toujours de commencer par les moindres de ces proportionnelles données, & de faire leurs angles entre-elles au point A, assez grands (plus ils le feront, tant mieux) pour rendre la penultième diagonale moindre que la somme des deux plus grandes proportionnelles réservées pour être l'une diagonale, & l'autre un des côtés du dernier des parallélogrammes précédens, lequel doit avoir cette penultième diagonale pour son autre côté. Par exemple, supposé que les précédentes proportionnelles données AB, AC, AE, AF, AD, &c. soient ici rangées de maniere que les moindres y précèdent par tout les plus grandes, il faudroit prendre les deux premières, c'est-à-dire (*Hyp.*) les deux moindres AB, AC, pour en faire le premier parallélogramme BACH; de sa diagonale AH, & de la troisième proportionnelle AE faire le second HAEG; de sa diagonale AG, & de la quatrième proportionnelle faire le troisième; & ainsi de suite jusqu'à l'antepenultième proportionnelle inclusive-ment, laquelle soit ici AE. De cette maniere la penultième diagonale AG sera toujours moindre que la somme $AF + AD$ des deux plus grandes & dernières des cinq proportionnelles ici données, à moins qu'on n'eût pris les angles BAC, HAE, trop petits : auquel cas il n'y a qu'à les augmenter, & faire ensuite les parallélogrammes précédens, pour rendre cette penultième diagonale AG moindre que la somme des deux dernières proportionnelles restantes AF, AD, ou GD, AD, en prenant $GD = AF$; desquelles GD, AD, & de la penultième diagonale

gonale AG, on pourra toujours alors faire le triangle ADG; & conséquemment aussi le dernier parallélogramme AGDF, qui aura AG, AF pour côtes, & AD pour diagonale: ce qui étant, la part. 4. du présent Th. 4. fait voir que les puissances données P, Q, R, S, K, seront en équilibre entr'elles en les dirigeant ainsi suivant AB, AC, AE, AF, DA; au lieu que si la penultième diagonale AG étoit égale ou moindre que la somme des deux dernières proportionnelles AF, DA, le triangle ADG seroit impossible, aussi-bien que le dernier parallélogramme AGDF; & par conséquent (*part. 2. Th. 4.*) l'équilibre entre les puissances données seroit pareillement impossible suivant les directions qu'elles auroient alors.

V. Pour appliquer aux Fig. 62. 63. ce qu'on voit des Fig. 60. 61. dans le précédent art. 4. il faut considérer dans la part. 4. du présent Th. 4. que pour mettre en équilibre dans les Fig. 62. 63. les puissances données P, Q, R, S, K, dont les proportionnelles soient AB, AC, AE, AF, AD; il faut (en commençant par les premières) que G soit le milieu de BC; que GE soit divisée en H de manière qu'on ait EH. HG :: 2. 1. Que HE soit divisée en L, de manière qu'on ait FL. LH :: 3. 1. Tout cela en sorte qu'il en résulte $4 \times AL$ à AB, AC, AE, AF, comme la puissance K est aux autres P, Q, R, S, & diriger ensuite la puissance K suivant LA prolongée vers K, & les autres P, Q, R, S, suivant AP, AQ, AR, AS. Donc la puissance K étant (*Hyp.*) à celles-là P, Q, R, S, comme AD est à AB, AC, AE, AF; il faut pour cet équilibre $4 \times AL = AD$, laquelle en ligne droite avec KA, soit (*Corol. 1.*) diagonale par A du dernier des parallélogrammes faits dans le précédent art. 4. Et conséquemment pour cet équilibre il faut que AL, distance (*Déf. 13.*) du nœud A au centre principal d'équilibre entre les quatre puissances P, Q, R, S, soit ici le quart de cette dernière diagonale, & que la puissance K soit suivant leur direction commune à contre-sens de

Fig. 62.
63.

ce qu'elles font ensemble d'effort suivant cette direction. La part. 4. du present Th. 4. fait voir qu'en general suivant le Corol 4. nomb. 2. du Lem. 11. si m étoit le nombre quelconque de ces puissances données, cette distance du nœud A au centre principal d'équilibre de toutes, moins une, devroit être égale à la dernière diagonale divisée par $m-1$, pour pouvoir être toutes en équilibre entr'elles autour de ce nœud commun A de leurs cordes; & conséquemment dans le cas present de cinq puissances, pour leur équilibre entr'elles la distance AL doit être égale à la dernière diagonale divisée par $5-1$; c'est-à-dire, par 4, ainsi qu'on le vient de dire. Donc pour mettre ici en équilibre entr'elles tant de puissances données qu'on voudra, sans faire aucun parallelogramme, il y faut observer tout ce qu'on a marqué dans l'art. 4. pour les y mettre par le moyen des parallelogrammes; c'est-à-dire, que pour mettre plus promptement & sûrement en équilibre les puissances données P, Q, R, S, K, &c. sans faire aucun parallelogramme, il faut commencer (comme dans l'art. 4.) par les moindres d'elles, ou par les moindres de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF, &c. qu'il faut diriger toutes, hors la plus grande réservée pour la dernière, de maniere qu'elles fassent des angles assez grands entr'elles pour arriver sûrement à l'équilibre requis.

Par exemple, si dans l'ordre qu'on les voit ici, les moindres sont les premières, en sorte que les plus grandes y soient par tout après les moindres, il faut commencer par un angle assez grand ABC fait des deux premières AB, AC, & diviser également en G la base BC; de ce point G par l'extrémité E de la troisième proportionnelle AE, mener la droite GE, qu'il faut diviser en H, de maniere qu'on ait $EH.HG :: 2. 1.$ De ce point H par l'extrémité F de la quatrième proportionnelle AF, mener la droite HF, laquelle doit être divisée en L, de maniere qu'on ait $FL.LH :: 3. 1.$ Et ainsi de suite suivant le Corol. 1. du Lem. 11. comme dans la démonstra-

tion de la part. 3. du présent Th. 4. jusqu'à la plus grande exclusivement de ces proportionnelles ou puissances, réservée pour la dernière, laquelle soit ici K. Après cela il faut diriger toutes les puissances P, Q, R, S, suivant leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF, ainsi placées, & la plus grande K réservée pour la dernière, suivant LA, distance du nœud commun A de leurs cordes au dernier point L de division, lequel sera (Déf. 13.) le centre principal d'équilibre de toutes les puissances P, Q, R, S, hors de la dernière K: alors $4 \times AL$ se trouvant à AB, AC, AE, AF, comme la puissance K dirigée suivant LA, est aux autres puissances P, Q, R, S, dirigées suivant AP, AQ, AR, AS; la part. 4. du présent Th. 4. fait voir que toutes ces puissances ainsi dirigées seront alors en équilibre entre-elles; & ainsi de quelque autre nombre m de puissances données que ce soit, dirigées de manière que le produit de $m-1$ par la distance du nœud commun A de leurs cordes au centre principal d'équilibre de toutes ces puissances, moins une, soit à chacune des proportionnelles de celles-là, comme cette exceptée est à chacune d'elles.

T H E O R E M E V.

La construction demeurant la même que dans les démon- FIG. 68.
 strations des part. 2. 3. du précédent Th. 4. si les cordes AP, 69.
 AQ, AR, AS, &c. avoient chacune plusieurs branches, chacune de ces branches encore plusieurs autres, & ainsi jusqu'à tant de branches qu'on voudra de chacune d'elles; qu'au lieu d'être tirées par les puissances P, Q, R, S, &c. comme dans ce Th. 4. leurs dernières branches l'étoient toutes par autant d'autres puissances, en quelque nombre qu'elles fussent: Tout le contenu du précédent Th. 4. en seroit encore vrai: sçavoir,

I. Qu'en cas d'équilibre de toutes ces puissances avec le poids K, l'effort résultant de leur concours d'action contre lui, seroit toujours suivant la direction KA de ce poids en sens contraire, & égal à sa pesanteur.

II. Que ce poids K ainsi soutenu par toutes ces puissances en équilibre avec lui, seroit aussi toujours à chacune d'elles comme la diagonale du dernier des parallelogrammes faits en A comme dans la démonstration 1. de la part. 2. du Th. 4. seroit à chacune des proportionnelles de ces mêmes puissances.

III. Que dans cet équilibre du poids K avec toutes ces puissances, si l'on appelle m le nombre des cordes (quel qu'il soit) dont A est le nœud commun; ce poids K sera aussi toujours à chacune de ces puissances, comme le produit de $m-1$ par la distance de ce nœud A à leur centre principal d'équilibre, sera à chacune de leurs proportionnelles.

IV. Reciproquement que si ce poids est à ces puissances en celle qu'on voudra des deux raisons ici marquées dans les part. 2. 3. & qu'il soit directement contraire à l'effort résultant de leurs concours, il sera en équilibre avec elles.

DEMONSTRATION.

PART. I. Cette part. 1. se démontrera de même que la part. 1. du Th. 4. les nomb. 1. 2. 3. du Corol. 2. du Lem. 3. faisant pareillement voir ici qu'en cas d'équilibre entre le poids K & l'effort résultant du concours de tout ce qu'il peut y avoir ici de puissances qui lui soient appliquées à l'extrémité d'autant de branches de cordes; cet effort doit être directement contraire à ce poids, & égal à sa pesanteur. Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.

Fig. 68. PART. II. Si la corde, par exemple AP , avoit plusieurs branches PX , PY , PZ , &c. issues d'un même nœud P , auxquelles fussent appliquées autant de puissances X , Y , Z , &c. qui fussent entr'elles comme les parties PO , PT , PV , &c. de ces branches, prises depuis leur nœud commun P ; que de deux quelconques PT , PV , de ces proportionnelles on fît le parallelogramme TV ; que de sa diagonale PM , & d'une troisième aussi quelconque PO de ces proportionnelles, on fît le parallelogramme MO ; que de sa diagonale PN , & d'une quatrième encore quelconque de ces mêmes proportionnelles, on fît de même un autre parallelogramme, & ainsi jusqu'à la dernière.

Fig. 52

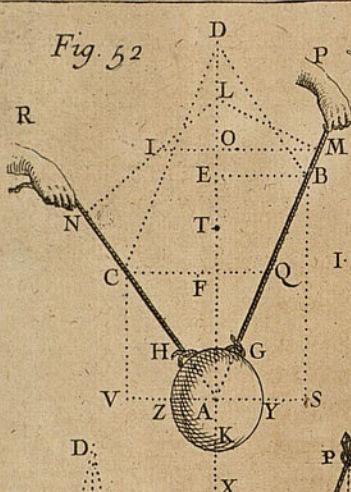


Fig. 53

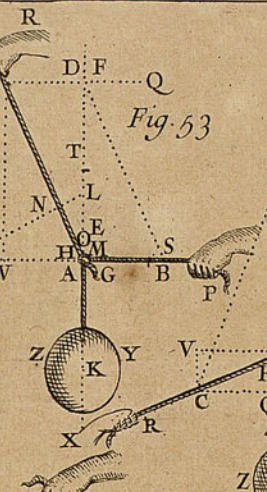


Fig. 54

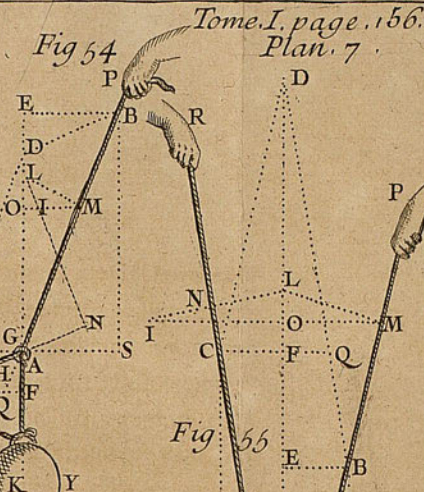


Fig. 55

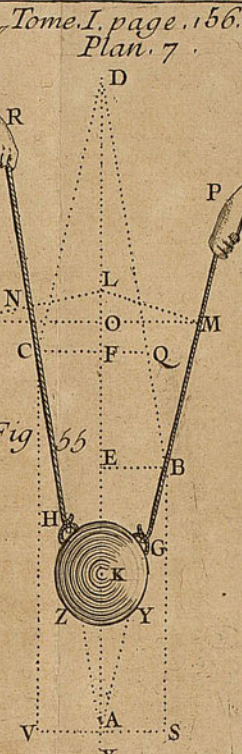


Fig. 57

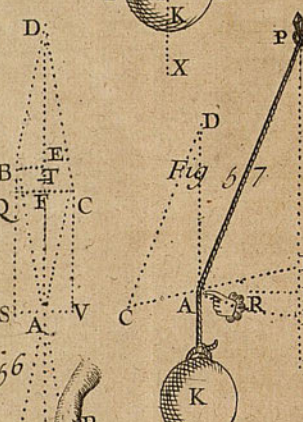


Fig. 58

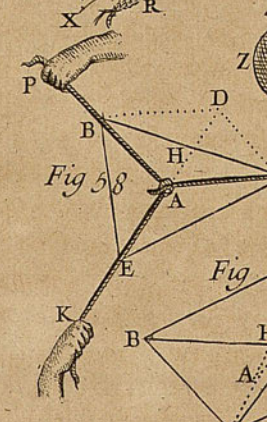


Fig. 59

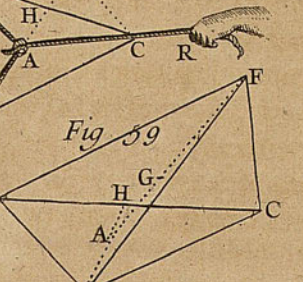


Fig. 56

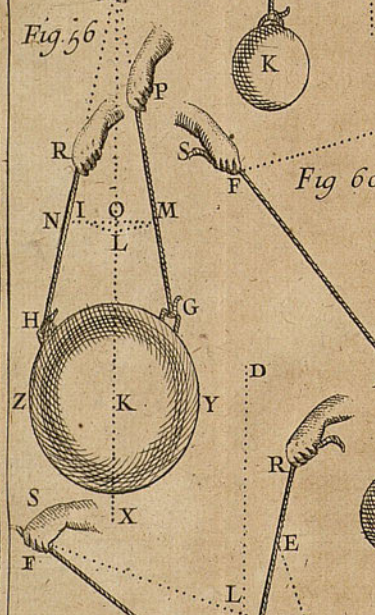


Fig. 60

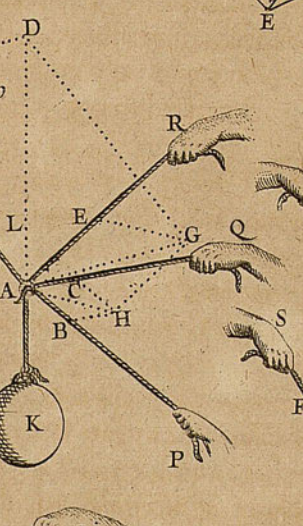


Fig. 61

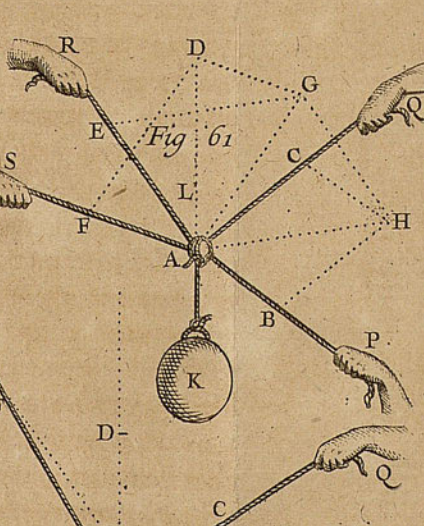


Fig. 62

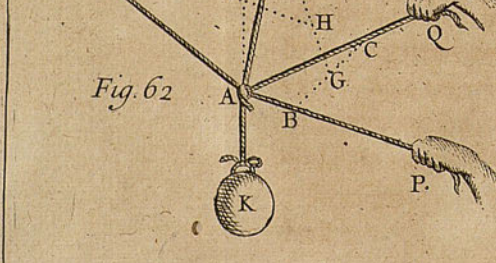
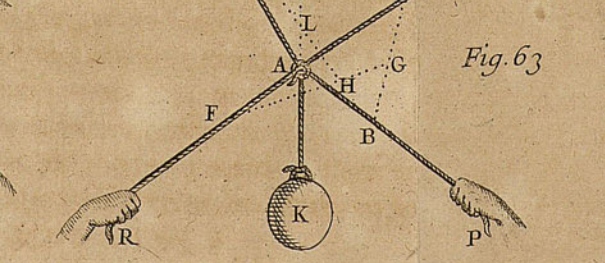


Fig. 63





Le Corol. 10. du Lem. 3. fait voir que l'effort résultant du concours des puissances X, Y, Z , &c. qui répondent à toutes ces proportionnelles PO, PT, PV , &c. doit être à chacune de ces puissances comme la diagonale du dernier des parallelogrammes précédens est à chacune de ces proportionnelles correspondantes. De sorte que s'il n'y a (comme ici) que trois puissances X, Y, Z , qui agissent ensemble sur le nœud P , l'effort résultant de leur concours sur ce nœud suivant la diagonale PN , est à chacune d'elles comme cette diagonale PN est à chacune de leurs proportionnelles PO, PT, PV . Donc la corde AP tirée par cet effort suivant cette direction PN , laquelle sera (*part. 1.*) en ligne droite avec elle, sera ainsi tirée par le concours des puissances X, Y, Z , comme (*princ. gener.*) par une seule puissance P , dirigée suivant AP , & égale à cet effort résultant du concours de celles-là, c'est-à-dire, par une puissance P , ainsi dirigée, laquelle (en prenant $AB=PN$) seroit à ces puissances X, Y, Z , comme AB à leurs proportionnelles PO, PT, PV . Donc aussi l'effort en A , résultant du concours des puissances X, Y, Z, Q, R, S , sera ici le même, & suivant la même direction, que celui qui y resulteroit du concours des puissances P, Q, R, S . Or en prenant AC, AE, AF , à AB , comme les puissances Q, R, S , sont à la puissance P , & en faisant ensuite les parallelogrammes qu'on voit en A , comme dans la démonstration de la *part. 2.* du Th. 4. Le Corol. 10. du Lem. 3. fait voir que l'effort résultant du concours de ces puissances P, Q, R, S , seroit non seulement suivant la diagonale AD du dernier $AFDG$ de ces parallelogrammes ainsi faits en A ; mais encore à chacune de ces mêmes puissances P, Q, R, S , comme cette dernière diagonale AD à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF . Donc l'effort en A , résultant du concours des puissances X, Y, Z, Q, R, S , est aussi suivant AD , & à chacune des puissances P, Q, R, S , comme AD est à AB, AC, AE, AF . Mais on vient de voir que P est à X, Y, Z , comme AB est à PO, PT, PV .

Donc l'effort A résultant du concours des puissances X, Y, Z, Q, R, S, est non seulement de A vers D suivant AD; mais encore à chacune de ces puissances comme cette diagonale AD du dernier AFDG des parallelogrammes faits en A, est à chacune de leurs proportionnelles PO, PT, PV, AC, AE, AF. Or la part. 1. fait voir qu'en cas d'équilibre entre le poids K & toutes ces puissances, l'effort résultant de leur concours lui est directement contraire & égal. Donc le poids K est aussi pour lors à chacune de ces puissances X, Y, Z, Q, R, S, comme la dernière AD des diagonales en A, est à chacune de leurs proportionnelles PO, PT, PV, AC, AE, AF.

On démontrera de la même manière quelque nombre de branches qu'on suppose aussi aux cordes AQ, AR, AS, que le poids K en équilibre avec les puissances appliquées aux extrémités de ces branches, au lieu des puissances Q, R, S, & avec celles des branches de la corde AP, au lieu de la puissance P: que ce poids K (dis-je) en cas d'équilibre avec les puissances ainsi appliquées aux extrémités de toutes ces cordes ou branches de cordes, sera à chacune de ces puissances, comme la dernière AD des diagonales en A sera à chacune de leurs proportionnelles. On démontrera de même, quelque nombre de cordes qui partent du nœud A, quelque nombre de branches qu'elles aient chacune, quelques branches qu'ayant encore celles-ci, & ainsi jusqu'à tant de cordes qu'on voudra faire partir du nœud A, & jusqu'à tant de branches qu'on leur voudra supposer à chacune; que le poids K en équilibre avec toutes les puissances appliquées aux extrémités de toutes ces branches, sera toujours à chacune de ces puissances, comme la diagonale du dernier des parallelogrammes faits en A, ainsi que dans la démonstration 2. de la part. 1. du Th. 4. sera à chacune de leurs proportionnelles prises depuis les derniers nœuds sur les directions ou branches de cordes de ces puissances. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. La corde AP ayant encore plusieurs branches PX, PY, PZ, &c. issues d'un même nœud P, auxquelles soient appliquées autant de puissances X, Y, Z, &c. qui soient entr'elles comme les parties PO, PT, PV, &c. de ces branches prises depuis leur nœud commun P; soit par les extrêmités T, V, de deux quelconques PT, PV, de ces proportionnelles, la droite TV; de son milieu M par l'extrémité O d'une troisième PO de ces mêmes proportionnelles; soit menée MO, laquelle soit divisée en N de manière qu'on ait ON. NM :: 2. 1. Et ainsi de suite suivant les Corol. 2. 3. 4. du Lem. 11. s'il y avoit ici plus de trois puissances, ou plus de trois branches à la corde AP. Le Corol. 5. de ce même Lemme 11. fait voir que l'effort résultant du concours de ces trois puissances X, Y, Z, sera ici de P vers N, & à chacune de ces puissances comme $3 \times PN$ est à chacune de leurs proportionnelles PO, PT, PV. Donc la corde AP tirée de cet effort suivant PN, qui sera (*part. 1.*) en ligne droite avec elle, sera ainsi tirée par le concours des puissances X, Y, Z, comme (*princip. gener.*) par une seule P dirigée suivant AP, & égale à l'effort résultant du concours de ces trois-là, c'est-à-dire, par une seule puissance P ainsi dirigée, laquelle (en prenant $AB = 3 \times PN$) seroit à celles-là X, Y, Z, comme AB à leurs proportionnelles PO, PT, PV. Donc aussi l'effort en A, résultant du concours des puissances X, Y, Z, Q, R, S, sera ici le même & suivant la même direction que celui qui y resulteroit du concours des puissances P, Q, R, S. Or prenant AC, AE, AF, à AB, comme Q, R, S, sont à P; & en menant (ainsi que dans la démonstration de la *part. 3.* du Th. 4.) par les extrêmités des proportionnelles AB, AC, AE, AF, premièrement la droite CB; secondement de son milieu G la droite GE, laquelle soit divisée en H de manière qu'on ait EH. HG :: 2. 1. En menant enfin HE divisée en L de manière qu'on ait FL. LH :: 3. 1. Le Corol. 5. du Lem. 11. fait voir que l'effort résultant du concours des puissances P, Q, R, S, seroit non seulement suivant AL,

mais encore à chacune de ces quatre puissances, comme $4 \times AL$ est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF . Donc l'effort en A , résultant du concours des six puissances X, Y, Z, Q, R, S , est aussi suivant AL , & à chacune des puissances P, Q, R, S , comme $4 \times AL$ est à AB, AC, AE, AF . Mais on vient de voir que P est à X, Y, Z , comme AB est à PO, PT, PV . Donc l'effort en A , résultant du concours des puissances X, Y, Z, Q, R, S , est non seulement de A vers L suivant AL distance (*Def. 13.*) du nœud A au centre principal L d'équilibre de ces six puissances ; mais encore à chacune d'elles, comme $4 \times AL$ est à chacune de leurs proportionnelles PO, PT, TV, AC, AE, AF . Or la part. 1. fait voir qu'en cas d'équilibre entre le poids K & toutes ces puissances, l'effort résultant de leur concours lui est non seulement directement contraire, mais encore égal. Donc ce poids K est aussi pour lors à chacune de ces puissances X, Y, Z, Q, R, S , comme $4 \times AL$ est à chacune de leurs proportionnelles PO, PT, PV, AC, AE, AF .

On démontrera de même, quelque nombre m de cordes qui partent du nœud A , quelque nombre de branches qu'elles aient chacune, quelques branches qu'ayent encore celles-ci, & ainsi jusqu'à tant de branches qu'on voudra ; que le poids K en équilibre avec toutes les puissances appliquées aux extrémités de toutes ces branches chacune à chacune, sera toujours à chacune de ces puissances, comme le produit de $m - 1$ par la distance du nœud A à leur centre principal d'équilibre est à chacune de leurs proportionnelles. *Ce qu'il falloit 3°. démontrer.*

FIG. 68.
49.

PART. IV. Le poids K étant ainsi supposé aux puissances X, Y, Z, Q, R, S , &c. appliquées comme ci-dessus en celles qu'on voudra des raisons marquées dans les part. 2. 3. il sera à ces puissances (*Corol. 10. du Lem. 3. & Corol. 5. du Lem. 11.*) en même raison que l'effort résultant de leur concours d'action contre lui ; & par conséquent ce poids sera ici égal à cet effort. Donc ce même poids

poids K étant de plus (*Hyp.*) directement contraire à ce même effort, il doit (*Ax. 3.*) demeurer en équilibre avec lui, c'est-à-dire, avec les puissances X, Y, Z, Q, R, S, &c. du concours desquelles cet effort résulte. *Ce qu'il falloit 4°. démontrer.*

COROLLAIRE.

Quelque nombre de nœuds & de branches qu'ayent ici les cordes des Fig. 68. 69. chacun de ces nœuds avec les branches qui en naissent, pouvant être regardé comme celui des Fig. 60. 61. 62. 63. avec les siennes; il est visible que ce qu'on a conclu du Th. 4. par rapport aux puissances appliquées aux branches de celui-ci, se peut aussi conclure du présent Th. 5. par rapport aux puissances appliquées aux branches de chacun des nœuds des Fig. 68. 69. quelque nombre de nœuds & de branches à chacun d'eux, qu'il y puisse avoir. Donc,

1°. Tant de puissances données qu'on voudra (en prenant le poids K pour une) appliquées à autant de branches de cordes, issues de tant de nœuds qu'on voudra, peuvent demeurer en équilibre entr'elles suivant une infinité de directions différentes pour toutes & pour chacune, pourvu qu'il y ait plus de trois branches à chaque nœud. Cela se prouvera comme les Corollaires 2. 3. du Théoreme 4.

2°. Réciproquement tant de puissances qu'on voudra, appliquées encore à autant de branches de cordes, issues d'autant de nœuds qu'on voudra, peuvent changer de rapports en une infinité de manières, & cependant faire toujours équilibre entr'elles suivant les mêmes directions, y étant successivement appliquées, pourvu qu'il y ait encore plus de trois branches à chaque nœud. Cela se prouvera comme les Corol. 4. 5. du Th. 4.

3°. En cas d'équilibre, chacun des nœuds où il n'y auroit que quatre branches répandues en plus d'une demi-sphère, sera toujours à un angle de parallélepède, suivant les trois côtes & la diagonale duquel les quatre

branches de ce nœud seront dirigées; & les quatre puissances qui y seront appliquées, seront alors entr'elles comme ces trois côtes & cette diagonale de parallélepède. Cela se prouvera comme le nomb. 2. du Corol. 7. du Th. 4.

4°. Si ces quatre puissances sont ainsi dirigées, & en ce rapport entr'elles il y aura équilibre aussi entr'elles. Tout cela se prouvera comme le nomb. 3. du Corol. 7. du Th. 4.

5°. Chacun des nœuds où il n'y auroit encore que quatre branches répandues en plus d'une demi-sphère, sera au centre de gravité d'une pyramide triangulaire, par les quatre angles de laquelle ces quatre branches passeront, en cas d'équilibre; & les puissances qui y seront appliquées, seront alors entr'elles comme les distances correspondantes de ce centre de gravité aux quatre angles de la pyramide; c'est-à-dire, que ces puissances seront alors entr'elles comme les parties de leurs directions ou de leurs cordes, comprises entre ce centre & chacun de ces angles. Cela se prouvera comme le nomb. 2. du Corol. 8. du Th. 4.

6°. Reciproquement si les quatre puissances de chaque nœud, ainsi dirigées par le centre de gravité & par les quatre angles d'une telle pyramide, sont entre-elles en ces rapports; elles feront aussi pour lors équilibre entr'elles. Cela se prouvera comme le nomb. 3. du Corol. 8. du Th. 4.

SCHOLIE.

S'il se trouvoit ici des nœuds de cordes, lesquels n'eussent que trois branches, le Th. 3. part. 1. 2. fait voir qu'en cas d'équilibre entre les puissances qui y seroient appliquées, ce nœud seroit dans le centre de gravité d'un triangle rectiligne, par les trois angles duquel les directions de ces trois puissances passeroient; & de plus que ces trois puissances seroient alors entr'elles comme les parties de leurs cordes ou directions, comprises entre

ce centre & chacun de ces angles, c'est-à-dire, comme les distances de ce centre de gravité à chacun de ces angles correspondans.

Le Th. 3. part. 3. fait reciproquement voir que si les trois puissances de chacun de ces nœuds sont dirigées par le centre de gravité & par les trois angles d'un triangle rectiligne quelconque; que de plus elles soient entre-elles comme les distances de ce centre à chacun de ces angles correspondans; elles feront alors en équilibre entr'elles.

Pour des nœuds à deux branches seulement, le nomb. 1. du Corol. 2. du Lem. 3. fait voir qu'il n'y en peut avoir, & que ce qu'on prendroit pour deux branches, se dirigeroit bien-tôt en une; c'est-à-dire, qu'elles se mettroient bien-tôt en ligne droite par l'action des deux puissances qui y seroient appliquées seules l'une contre l'autre.

THEOREME VI.

Soit encore le poids *K* soutenu en équilibre partant de puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, &c. qu'on voudra, appliquées à autant de cordes *AP*, *AQ*, *AR*, *AS*, *AT*, &c. attachées ensemble par un même nœud *A*, & dirigées suivant quelques plans que ce soient: je dis presentement que ce poids ainsi en équilibre avec toutes ces puissances, sera toujours à chacune d'elles comme la somme de leurs sublimités, moins celle de leurs profondeurs, c'est-à-dire, comme l'excès dont la première de ces deux sommes surpasse la seconde, est à chacune des proportionnelles de ces mêmes puissances. Fig. 70.
71.

DEMONSTRATION.

Depuis le nœud commun *A* des cordes *AP*, *AQ*, *AR*, *AS*, *AT*, &c. soient sur ces mêmes cordes autant de parties *AB*, *AC*, *AE*, *AF*, *AM*, &c. proportionnelles aux puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, &c. qui leur sont appliquées; des extrémités *B*, *C*, *E*, *F*, *M*, &c. de ces proportionnelles soient menées autant de lignes *Bb*, *Cc*, *Ee*, Fig. 70.
X ij

Ef, *Mm*, &c. perpendiculaires en *b*, *c*, *e*, *f*, *m*, &c. sur la direction *AK* du poids *K* prolongée de part & d'autre. On voit suivant la Déf. 16. que *Ac*, *Ae*, *Af*, sont ici les sublimités des puissances *Q*, *R*, *S*, qui tirent de bas en haut, & que *Ab*, *Am*, y sont les profondeurs des puissances *P*, *T*, qui y tirent de haut en bas. Je dis donc que le poids *K* en équilibre (*Hyp.*) avec les puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, &c. est à chacune d'elles comme $Ac + Ae + Af - Ab - Am +$, &c. est à chacune de leurs proportionnelles *AB*, *AC*, *AE*, *AF*, *AM*, &c.

Pour le voir, soit le parallélogramme *BACH* fait de deux quelconques *AB*, *AC*, de ces proportionnelles; de sa diagonale *AH*, & d'une troisième quelconque *AE* de ces mêmes proportionnelles soit ensuite le parallélogramme *HAEG*; de sa diagonale *AG*, & d'une quatrième proportionnelle *AF*, soit aussi le parallélogramme *GAFD* de sa diagonale *AD*; & d'une cinquième proportionnelle *AM*, soit pareillement le parallélogramme *DAMN*; de sa diagonale *AN*, & d'une sixième proportionnelle, soit encore un autre parallélogramme, & toujours de même jusqu'à la dernière inclusivement des proportionnelles aux puissances supposées en équilibre avec le poids *K*, laquelle étant ici *AM*, la dernière des diagonales y fera *AN*. Par conséquent (*Th. 4. part. 1. 2.*) non seulement cette dernière diagonale *AN* sera ici en ligne droite avec la direction *AK* de ce poids, mais encore ce poids *K* y fera à chacune des puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, supposées en équilibre avec lui, comme cette dernière diagonale *AN* est à chacune de leurs proportionnelles *AB*, *AC*, *AE*, *AF*, *AM*.

Cela étant ainsi, des points *H*, *G*, *D*, des parallélogrammes précédens, hors du dernier, soient encore *Hh*, *Gg*, *Dd*, perpendiculaires en *b*, *g*, *d*, sur la direction *AK* du poids *K*, prolongée de part & d'autre. Le Lem. 10. donne, 1°. $Ab = Ab - Ac$. 2°. $Ag = Ac - Ab$ (*omb. 1.*) $= Ae - Ab + Ac$. 3°. $Ad = Ag + Af$ (*omb. 2.*) $= Ae - Ab + Ac + Af$. 4°. $AN = Ad - Am$ (*omb. 3.*) $= Ae - Ab$

$\rightarrow A_c \rightarrow A_f \rightarrow A_m$. Et en continuant toujours ainsi jusqu'à la dernière diagonale inclusivement, telle qu'est ici AN , laquelle se trouve toujours (*Th. 4. part. 1.*) dans la direction prolongée KA du poids K en équilibre avec les puissances supposées; on trouvera toujours cette dernière diagonale $\rightarrow A_c \rightarrow A_b \rightarrow A_c \rightarrow A_f \rightarrow A_m \rightarrow$ &c. ce qui se voit aussi tout d'un coup par le Corol. 3. du Lem. 10.

Or le *Th. 4. part. 2.* fait voir qu'en ce cas d'équilibre le poids K est toujours à chacune des puissances P, Q, R, S, T , &c. qui l'y soutiennent, comme cette dernière diagonale est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF, AM , &c. Donc ce poids K est aussi toujours alors à chacune de ces puissances P, Q, R, S, T , &c. comme $A_c \rightarrow A_c \rightarrow A_f \rightarrow A_b \rightarrow A_m \rightarrow$, &c. est à chacune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF, AM , &c. c'est-à-dire (*Déf. 16.*) comme la somme de leurs sublimitez A_c, A_e, A_f , &c. moins la somme de leurs profondeurs A_b, A_m , &c. ou comme l'excès dont la première de ces deux sommes surpasse la seconde, est à chacune de ces mêmes proportionnelles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

Soient encore les lignes AB, AC, AE, AF, AM , &c. *Fig. 711.* proportionnelles aux puissances P, Q, R, S, T , &c. supposées en équilibre avec le poids K suivant ces directions. Des extrêmités B, C, E, F, M , &c. de ces proportionnelles soient encore aussi Bb, Cc, Ee, Ff, Mm , &c. perpendiculaires en b, c, e, f, m , &c. sur la direction AK de ce poids, prolongée de part & d'autre. Soient de plus appelées b, c, e, f, m , &c. les forces verticales employées selon le Lem. 3. part. 1. par les puissances P, Q, R, S, T , &c. pour ou contre le poids K suivant la direction Am ou Ad .

Cela posé, le Lem. 3. part. 1. donnera

$$\left\{ \begin{array}{l} b. P :: Ab. AB. \\ c. Q :: Ac. AC. \\ e. R :: Ae. AE. \\ f. S :: Af. AF. \\ m. T :: Am. AM. \\ \&c. \end{array} \right.$$

Donc les puissances $P, Q, R, S, T, \&c.$ étant (*Hyp.*) entr'elles comme $AB, AC, AE, AF, AM, \&c.$ leurs forces verticales $b, c, e, f, m, \&c.$ pour ou contre le poids K , sont aussi entr'elles comme $Ab, Ac, Ae, Af, Am, \&c.$ Par conséquent l'on aura ici $c + e + f - b - m \pm$, &c. $b :: Ac + Ae + Af - Ab - Am \pm$ &c. Ab . Mais on vient de voir $b. P :: Ab. AB$. Donc aussi (en raison ordonnée) ($c + e + f - b - m \pm$, &c. $P :: Ac + Ae + Af - Ab - Am \pm$, &c. AB . Or les efforts verticaux $c, e, f, \&c.$ des puissances $Q, R, S, \&c.$ étant ici de bas en haut directement contraires au poids K , & aux efforts verticaux $b, m, \&c.$ de haut en bas, que les puissances $P, T, \&c.$ y font directement contre ceux-là en faveur de ce poids; l'équilibre ici supposé exige (*Ax. 4.*) $c + e + f + \&c = K + b + m + \&c$. Et conséquemment $c + e + f - b - m \pm \&c = K$. Donc $K. P :: Ac + Ae + Af - Ab - Am \pm$ &c. AB . Mais (*Hyp.*) P est à $Q, R, S, T, \&c.$ comme AB est à $AC, AE, AF, AM, \&c.$ Donc aussi (en raison ordonnée) ce poids K est à chacune de toutes les puissances $P, Q, R, S, T, \&c.$ supposées en équilibre avec lui, comme $Ac + Ae + Af - Ab - Am \pm$, &c. est à chacune de leurs proportionnelles $AB, AC, AE, AF, AM, \&c.$ Or (*Déf. 16.*) Ac, Ae, Af , sont les sublimitéz des puissances Q, R, S , qui tirent de bas en haut; & Ab, Am , sont les profondeurs des puissances P, T , qui tirent au contraire de haut en bas. Donc enfin le poids K en équilibre avec elles & avec les autres, c'est-à-dire, avec toutes les puissances $P, Q, R, S, T, \&c.$ est toujours alors à chacune d'elles, comme la somme de leurs sublimitéz,

moins la somme de leurs profondeurs, ou comme l'excès de la première de ces deux sommes sur la seconde, est à chacune des proportionnelles AB, AC, AE, AF, AM, &c. de ces mêmes puissances. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

COROLLAIRE I.

Puisque suivant la première des deux démonstrations précédentes, & suivant le Corol. 3. du Lem. 10. tant que le poids K est en équilibre (comme ci-dessus) avec les puissances P, Q, R, S, T, &c. la somme de leurs sublimitez, moins la somme de leurs profondeurs, est toujours égale à la diagonale du dernier des parallelogrammes faits de leurs proportionnelles comme dans la démonstration 1. & comme dans la démonstration de la part. 2. du Th. 4. Il suit réciproquement de la part. 4. de ce Th. 4. qu'il y aura toujours équilibre entre ce poids & ces puissances, tant que la somme de leurs sublimitez, moins celle de leurs profondeurs, prises les unes & les autres sur sa direction, sera égale à cette dernière diagonale prise aussi sur la direction de ce poids.

COROLLAIRE II.

Puisque (*Démonstr. 2.*) les efforts verticaux c, e, f , des puissances sublimes Q, R, S, sont entr'eux comme les sublimitez Ac, Ae, Af , de ces puissances; & que (*Démonstr. 2.*) leur somme $c+e+f$ est égale à la somme $b+m+K$ des verticaux directement contraires b, m , des puissances profondes P, T, & du poids K, tant que ce poids est en équilibre avec toutes ces puissances: il suit manifestement que les portions de $b+m+K$ que les puissances sublimes Q, R, S, portent chacune alors pour sa part, sont entr'elles comme les sublimitez Ac, Ae, Af , de ces mêmes puissances.

COROLLAIRE III.

Par la même raison si toutes les puissances P, Q, R, S, T, &c. étoient sublimes, c'est-à-dire (*Déf. 16.*) si elles

tiroient toutes de bas en haut contre le poids K en équilibre avec elles, en sorte que leurs forces verticales b, c, e, f, m , &c. fussent toutes de bas en haut directement contraires à ce poids, & que conséquemment (*Déf. 10.*) Ab, Ac, Ae, Af, Am , &c. fussent autant de sublimitéz de ces puissances; ce que chacune d'elles porteroit ou soutiendrait de ce poids, seroit alors comme chacune de ces mêmes sublimitéz.

COROLLAIRE IV.

*Fig. 72.
73.*

Si de toutes ces puissances il n'en restoit que deux R, S , qui seules soutinssent ensemble le poids K en équilibre avec elles, comme dans les *Fig. 72. 73.* il suit des deux derniers Corol. 2. 3. conformément aux Corol. 2. 5. 6. du Th. 2.

Fig. 73.

1°. Que si une de ces deux puissances, par exemple R , tiroit le poids K de haut en bas, & l'autre S de bas en haut, comme dans la *Fig. 73.* ce poids seroit (*Corol. 2.*) à chacune de ces puissances R, S , comme l'excès $Af - Ae$ de la sublimité Af de la seconde S sur la profondeur Ae de la première R , seroit à chacune des proportionnelles AE, AF , de ces mêmes puissances R, S , conformément au Corol. 6. du Th. 2.

2°. Qu'alors l'effort vertical f de bas en haut de la puissance sublime S , seroit seul égal à $K + e$ somme du poids K & de l'effort vertical e de la puissance profonde R : de sorte que la puissance sublime S soutiendrait alors seule le poids K augmenté de l'effort vertical e que la puissance profonde R fait de haut en bas en faveur de ce poids, conformément encore au Corollaire 6. du Théoreme 2.

Fig. 72.

3°. Mais si les puissances R, S , étoient sublimes toutes deux comme dans la *Fig. 72.* c'est-à-dire (*Déf. 16.*) si elles tiroient toutes deux de bas en haut contre le poids K en équilibre (*Hyp.*) avec elles; les précédens Corol. 2. 3. font aussi voir que ce poids seroit alors à chacune de ces puissances R, S , comme la somme $Ae + Af$ de leurs sublimitéz

sublimentez Ae, Af, seroit à chacune de leurs proportionnelles AE, AF, conformément au Corol. 5. du Th. 2.

4°. Ces précédens Corol. 2. 3. font voir aussi que la partie du poids K soutenue par la puissance R, seroit alors à son autre partie soutenue par la puissance S, comme la sublimité Ae de la premiere de ces deux puissances seroit à la sublimité Af de la seconde, conformément au Corol. 2. nomb. 1. du Th. 2.

Il est manifeste que tous les autres Corollaires du Th. 2. & ce Théoreme lui-même pourroient être ainsi déduits du précédent Corol. 3. Aussi ce Th. 2. n'est-il qu'un cas particulier du présent Th. 6. d'où résulte ce Corol. 4.

C O R O L L A I R E V.

Pour faciliter le calcul de tout ceci, soient pris a pour le sinus total, & p, q, r, f, t , &c. pour les sinus des angles ABb, ACc, AEe, AFf, AMm, &c. complemens (chacun à un droit) des aigus que font les directions des puissances P, Q, R, S, T, &c. avec celle du poids K (Hyp.) en équilibre avec elles.

$$\begin{array}{l} \text{Les angles (Hyp.) droits en } b, c, \\ e, f, m, \text{ \&c. donneront} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a. p :: AB. Ab = \frac{p}{a} \times AB \\ a. q :: AC. Ac = \frac{q}{a} \times AC \\ a. r :: AE. Ae = \frac{r}{a} \times AE \\ a. f :: AF. Af = \frac{f}{a} \times AF \\ a. t :: AM. Am = \frac{t}{a} \times AM \\ \&c. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{D'où résulte } Ac + Ae + Af - Ab - Am \pm \&c. = \\ \frac{q \times AC + r \times AE + f \times AF - p \times AB - t \times AM \pm \&c.}{a} \end{array}$$

mais suivant le présent Th. 6. le poids K ici en équilibre (Hyp.) avec les puissances P, Q, R, S, T, &c. y est à chacune d'elles comme $Ac + Ae + Af - Ab - Am \pm \&c.$ est à cha-

cune de leurs proportionnelles AB, AC, AE, AF, AM, &c. Donc ce poids K y doit pareillement être à chacune de ces puissances P, Q, R, S, T, &c. comme

$$\frac{q \times AC + r \times AE + s \times AF - p \times AB - t \times AM + \&c.}{a.}$$

est à chacune de leurs mêmes proportionnelles AB, AC, AE, AF, AM, &c. Et conséquemment aussi comme $q \times AC + r \times AE + s \times AF - p \times AB - t \times AM + \&c.$ est à chacun des produits $a \times AB, a \times AC, a \times AE, a \times AF, a \times AM$, &c. faits du sinus total par chacune de leurs proportionnelles. D'où l'on voit que n'y ayant ici que des proportionnelles de puissances données, avec des sinus d'angles donnez, il sera aisé d'en conclure par le calcul la valeur requise du poids ainsi en équilibre avec ces puissances.

THEOREME VII.

Fig. 74.

De quelque maniere qu'un poids soit soutenu avec des cordes par quelque nombre de puissances que ce soit, appliquées aux branches de tant de nœuds qu'on voudra, dirigées suivant quelques plans que ce soient: chacune de ces puissances est toujours à ce poids en raison composée d'autant d'autres raisons qu'il y a de nœuds entre cette puissance & ce poids: sçavoir, à chaque nœud, de la raison qui est entre la proportionnelle à la force dont ce nœud est tiré suivant la corde qui lui donne communication avec cette puissance, & la somme des sublimitéz, moins celle des profondeurs, de toutes les forces dont les branches dans lesquelles ce même nœud se divise, sont tirées suivant sa direction contre la résistance qui leur vient par la corde de communication de lui au poids supposé en équilibre avec toutes les puissances qui lui sont ainsi appliquées.

DEMONSTRATION.

Si le poids K dont la corde AL se divise en tant de branches AZ, AX, AY, AΦ, qu'on voudra, dont celles qu'on voudra aussi, se divisent encore en plusieurs branches,

& celles qu'on voudra encore de celles-ci en plusieurs autres de la maniere qu'on voit ici ; & toujours de même jusqu'aussi loin qu'on voudra. Commencez au premier nœud A à marquer sur les branches AZ, AX, AY, Aφ, &c. des parties AM, AN, AP, Aθ, &c. qui soient entre elles comme les forces avec lesquelles ces cordes sont tirées chacune suivant sa direction. Faites-en autant sur les branches dans lesquelles celles-ci se subdivisent ; & toujours de même jusqu'aux dernières auxquelles les puissances C, E, D, B, F, G, H, I, T, φ, &c. sont appliquées. Après cela des extrêmités de toutes ces proportionnelles soient marquées (*Déf. 16.*) les sublimitez & les profondeurs de toutes ces forces.

Cela fait, je dis qu'en cas d'équilibre entre toutes ces forces ou puissances & le poids K, chacune d'elles, par exemple, la puissance D sera toujours alors à ce poids K en raison composée d'autant d'autres raisons telles qu'elles sont énoncées dans ce Théoreme-ci, qu'il y a de nœuds entre cette puissance & ce poids.

Car, 1°. la puissance D étant (*Hyp.*) à la puissance E, comme OS à OV, elle est aussi (*Th. 6.*) à la force dont le nœud O leur résiste suivant OZ, comme OS à la somme de leurs sublimitez Of & Ou, c'est-à-dire :: OS. Of + Ou. 2°. Cette même résistance ou force du nœud O suivant ZO, étant aussi (*Hyp.*) aux puissances C, B, comme ZR à ZL & ZQ, elle est de même (*Th. 6.*) à la résistance que leur fait le nœud Z suivant ZA, comme ZR à la somme des sublimitez Zr & Zq moins la profondeur Zl, c'est-à-dire :: ZR. Zr + Zq - Zl. 3°. Enfin la valeur de cette résistance suivant ZA, étant encore (*Hyp.*) aux forces dont le nœud A est tiré suivant AX, AY, Aφ, &c. comme AM à AN, AP, Aθ, &c. elle est aussi (*Th. 6.*) au poids K comme AM à la somme des sublimitez Am, An, &c. moins celle des profondeurs Aλ, Ap, &c. c'est-à-dire :: AM. Am + An - Aλ - Ap. Donc en multipliant par ordre ces trois rangées de proportionnelles, la puissance D se trouvera être au poids K, comme

le produit des trois antecédens OS, ZR, AM, au produit de leurs trois conséquens $Of+Ou$, $Zr+Zq-Zl$, $Am+An-AP-A\lambda$: c'est-à-dire en raison composée des trois raisons de OS à $Of+Ou$, de ZR à $Zr+Zq-Zl$, & de AM à $Am+An-AP-A\lambda$ qu'on voit telle que le Théoreme les annonce. Or il n'y a en effet que trois nœuds O, Z, & A, entre cette puissance D & ce poids K. Donc cette puissance est ici à ce poids en raison composée d'autant d'autres raisons telles que ce Théoreme-ci les annonce, qu'il y a de nœuds entre cette puissance D & ce poids K.

On démontrera de même que la puissance C est à ce poids K en raison composée de ZL à $Zr+Zq-Zl$, & de AM à $Am+An-AP-A\lambda$. On trouvera encore de même que la puissance F est à ce même poids K en raison composée de $X\beta$ à $Xb+Xf$, & de AN à $Am+An-AP-A\lambda$; & ainsi de toutes les autres puissances, en quelque nombre qu'elles soient, de quelque maniere, & à quelque nombre de nœuds qu'elles soient appliquées.

Donc en general, de quelque maniere qu'un poids soit soutenu avec des cordes par quelque nombre de puissances que ce soit, appliquées à tant de nœuds qu'on voudra, chacune d'elles est toujours à ce poids en raison composée d'autant d'autres telles que ce Théoreme-ci les annonce, qu'il y a de nœuds entre cette puissance & ce poids. *Ce qu'il falloit démontrer.*

C O R O L L A I R E I.

On voit qu'en prenant ZR égale à $Of+Ou$, avec ZL & ZQ à ZR en même proportion qu'elles sont ici; de plus AM égale à $Zq+Zr-Zl$, avec AN, AP, A θ , &c. aussi à AM en même proportion qu'elles sont ici: la puissance D sera au poids K, comme OS à $Am+An-CP+A\lambda$ &c. c'est-à-dire, comme la proportionnelle à la somme des sublimitéz moins celle des profondeurs des forces avec lesquelles les branches du premier nœud A sont tirées chacune suivant sa direction. Il en faut penser au-

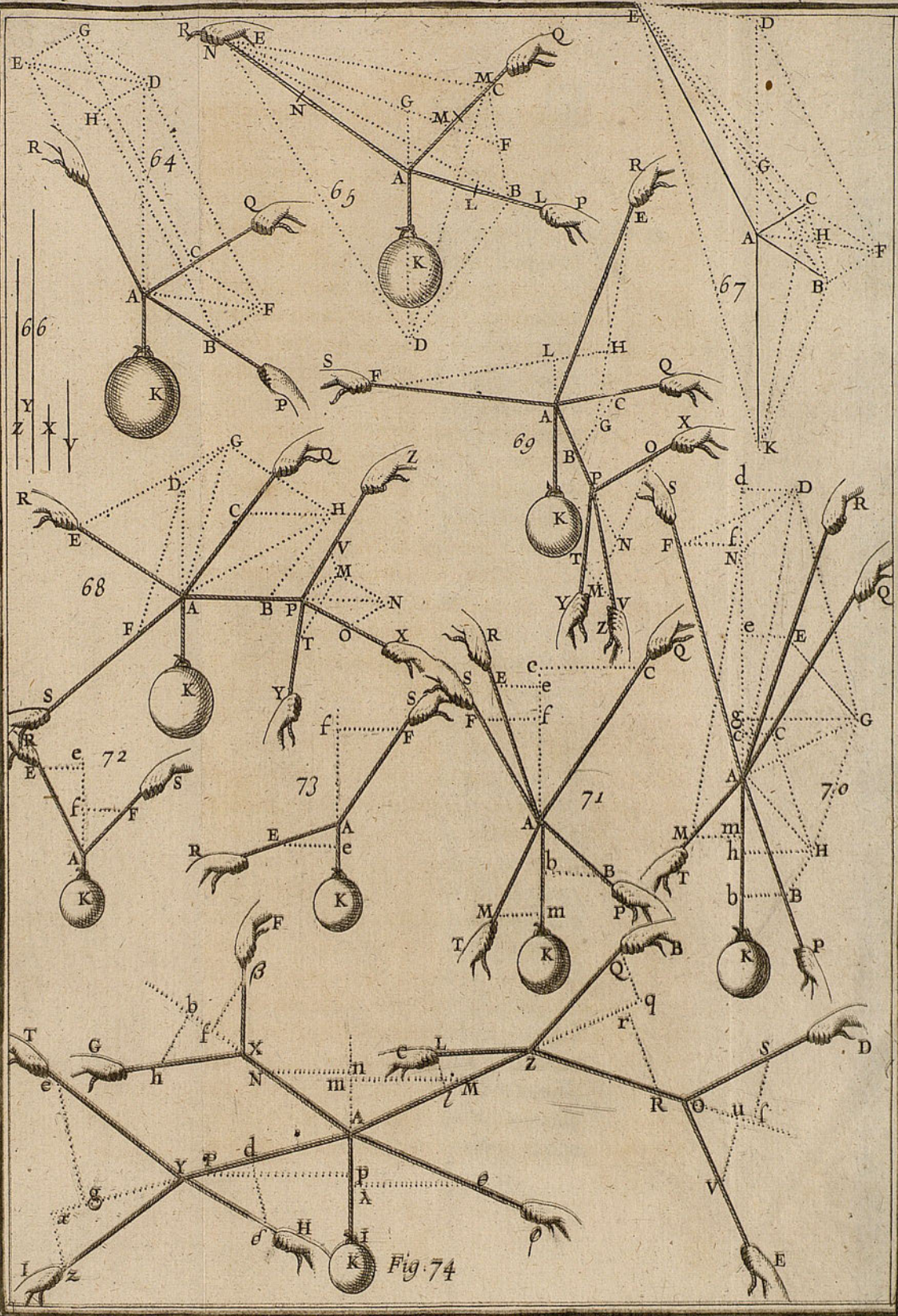


Fig. 74



tant de toutes les autres puissances appliquées au poids K, soit de près, soit de loin.

COROLLAIRE II.

Lorsqu'un poids attaché à une corde qui a plusieurs nœuds, par chacun desquels, entre toutes les branches qui en naissent, il n'y en a qu'une qui se subdivise en d'autres branches : lors, dis-je, que le poids K attaché à une telle corde, est soutenu par plusieurs puissances Y, X, S, R, V, Z, &c. tellement appliquées aux dernières de ces branches que tous les nœuds F, E, C, &c. d'où elles naissent, se trouvent dans la ligne de direction de ce poids ; chacune de ces puissances, en quelque nombre qu'elles soient, est toujours à ce poids comme la proportionnelle de cette même puissance à la somme des sublimité moins celle des profondeurs de tout ce qu'il y en a d'appliquées à ce même poids. Car si l'on prend sur les branches de chaque nœud des parties OF, EI, CB, CA, EH, FK, FN, EM, &c. proportionnelles aux forces avec lesquelles chacune de ces branches est tirée suivant sa direction, & que des extrémité de ces mêmes parties on marque (*Def. 16.*) leurs sublimité avec leurs profondeurs ; on trouvera, 1°. que les proportionnelles FN, EM, &c. qui se trouvent dans la ligne de direction du poids K, sont égales aux sublimité FN, EM, &c. des forces avec lesquelles ces proportionnelles sont tirées suivant leur direction, c'est-à-dire, suivant celle du poids. 2°. On trouvera encore que chacune de ces mêmes proportionnelles, par exemple, FN est aussi toujours égale à la somme des sublimité moins celle des profondeurs des forces ou des puissances appliquées au nœud E qui est immédiatement au dessus du nœud F depuis lequel cette proportionnelle a été prise : puisque (*Hyp.*) cette même proportionnelle, & (*Th. 6.*) cette différence des sommes sont à la proportionnelle EI de la puissance X, comme la force dont le nœud E est tiré suivant la corde EF, est à cette même puissance. Pour la même raison.

EM est égale à la somme des sublimitez moins celle des profondeurs des forces ou des puissances appliquées au nœud C, qui est immédiatement au dessus de E; & ainsi des autres proportionnelles qui se trouvent dans la direction du poids K. De-là on verra que chacune des sublimitez FN, EM, &c. des forces qui suivent la direction de ce poids, est toujours égale à la somme des sublimitez moins celle des profondeurs des forces ou des puissances au nœud qui est immédiatement au dessus de celui depuis lequel elle se prend, par exemple, au dessus de F pour FN, au dessus de E pour EM, &c. D'où il suit que la sublimité FN, qui se prend depuis le plus bas F de tous ces nœuds, est égale à la somme des sublimitez moins celle des profondeurs de toutes les puissances X, V, S, R, &c. appliquées à tous les autres nœuds E, C, &c. Or on vient de voir dans le précédent Corol. 1. que chacune de toutes les puissances qui soutiennent le poids K, par exemple S, ou Y, est à ce poids comme la proportionnelle CB, ou OF, de cette puissance est à la somme des sublimitez moins celle des profondeurs des forces avec lesquelles toutes les branches du plus bas nœud F sont tirées chacun suivant la direction contre ce poids K; c'est-à-dire, à la somme faite de la sublimité FN, & de la somme des sublimitez moins les profondeurs des puissances Y, Z, &c. immédiatement appliquées au nœud F. Donc chacune des puissances Y, X, S, R, V, Z, &c. est ici au poids K, comme la proportionnelle de cette puissance est à la somme des sublimitez moins celle des profondeurs de tout ce qu'il y en a d'appliquées à ce même poids.

Il est ici à remarquer que les proportionnelles FN, EM, &c. dirigées suivant la direction du poids K, ne le sont d'aucune des puissances ici supposées, mais de forces en ce sens résultantes du concours de ces puissances: par exemple, FN n'exprime aucune de ces puissances, elle n'exprime que la force ou l'effort suivant FE, résultant du concours d'action de tout ce qu'il y a de puissances R, V, X, S, &c. au dessus de F. De

même EM n'exprime que la force ou l'effort suivant EC , résultant du concours d'action de tout ce qu'il a de puissances $R, S, \&c.$ au dessus de E ; & ainsi de tout ce qu'il pourroit y avoir d'autres proportionnelles dirigées suivant la direction du poids. K .

COROLLAIRE III.

Puisque suivant le précédent Corol. 2. chacune des puissances ici supposées en équilibre avec le poids K , y est à ce poids comme la proportionnelle de cette puissance à la somme des sublimités moins celle des profondeurs de tout ce qu'il y en a d'appliquées à ce même poids; la somme de toutes ces puissances doit être ici à ce poids, comme la somme de leurs proportionnelles à la somme de leurs sublimités moins celle de leurs profondeurs: de sorte que s'il n'y en avoit que deux d'appliquées à chaque nœud, dont l'une tirât à droit & l'autre à gauche, & que toutes celles de chaque côté fussent égales entr'elles, avec des directions parallèles entr'elles, la somme (Fig. 75.) des sublimités, par exemple, $Fo + Fk$, ou $Ei + Ek$, ou $Cb + Ca$, &c. des deux puissances appliquées à quel que ce soit des nœuds F, E, C , &c. ou bien la différence (Fig. 76.) de la sublimité de l'une à la profondeur de l'autre, par exemple, $Fk - Fo$, ou $Eb - Ei$, ou $Ca - Cb$, &c. étant alors la même pour tous ces nœuds, aussi-bien que les proportionnelles de ces puissances; la somme de toutes ces mêmes puissances seroit alors au poids K comme la somme des proportionnelles de deux d'entr'elles, appliquées à un même nœud, quel qu'il soit, est à la somme (Fig. 75.) des sublimités de ces deux puissances, ou à la différence (Fig. 76.) dont la sublimité de l'une surpasse la profondeur de l'autre.

COROLLAIRE IV.

Ce qui fait enfin voir que si toutes les puissances Y, F, X, S, R, V, Z , &c. étoient égales entr'elles, & que toutes leurs directions fussent vers le haut avec celle du poids K

des angles égaux auffi entr'eux ; leur somme feroit alors à ce poids (Fig. 75.) comme une de leurs proportionnelles à une de leurs sublimitez , l'une & l'autre prise à volonté : c'est-à-dire , comme le sinus total au sinus du complément de celui qu'on voudra de ces mêmes angles.

COROLLAIRE V.

FIG. 77.
78.

Ce Théoreme-ci fait encore voir que dans l'hypothese des lignes de direction de tous les points du corps AD, concourantes au centre E de la Terre, de quelque maniere que ce poids soit soutenu par tant de puissances F, G, H, I, K, L, M, N, &c. qu'on voudra avec des cordes qui lui soient appliquées en tant de points A, B, C, D, &c. qu'on voudra auffi ; chacune de ces puissances fera toujours à ce poids, comme chacune de leurs proportionnelles à la somme des sublimitez des forces avec lesquelles ces points A, B, C, D, &c. seront tirez suivant les lignes AE, BE, CE, DE, &c. par le concours d'action des puissances qui y sont appliquées : des sublimitez, dis-je, déterminées comme dans le Corol. I. Car il est clair que ce poids agit contre toutes ces puissances de même que feroit une force qui lui seroit égale, si AE, BE, CE, DE, &c. étoient autant de cordes attachées ensemble par un nœud commun E auquel cette force fût appliquée suivant la direction ZE du centre de gravité de ce poids. Or en ce cas les points A, B, C, D, &c. étant comme autant de nœuds auxquels sont appliquées, chacune suivant sa direction, les puissances F, G, H, I, K, L, M, N, &c. si l'on prend depuis E sur chacune des lignes AE, BE, CE, DE, &c. une partie Eg, Ef, Ec, Eb, &c. égale à la somme des sublimitez moins celle des profondeurs des puissances appliquées à chacun des points A, B, C, D, &c. On trouvera (Cor. I.) que chacune de toutes ces puissances F, G, H, I, K, L, M, N, &c. feroit alors à la force qu'on suppose en E égale au poids AD, comme chacune de leurs proportionnelles DO, CP, BQ, DX, AR, CV, BT, AS, &c. à la somme des sublimitez El, Ee,

Ee, Ed, Ea, &c. des forces dont les nœuds *A, B, C, D, &c.* seroient alors tirez, chacun suivant la ligne qui le joint avec le point *E*. Donc chacune de ces mêmes puissances est aussi au poids *AD*, comme chacune de leurs proportionnelles à la somme de telles sublimitez des forces avec lesquelles les points *A, B, C, D, &c.* sont tirez suivant les lignes *AE, BE, CE, DE, &c.* par le concours d'action des puissances qui y sont appliquées.

Si les forces avec lesquelles les differens points A, B, C, D, &c. du corps AD, sont tirez suivant des lignes qui concourent au centre de la Terre (auquel on suppose que tous les points tendent) par le concours d'action des puissances qui lui sont appliquées, avoient quelque profondeur: On trouveroit de même que chacune de toutes ces puissances supposées en équilibre avec ce poids AD, lui seroit en raison de la proportionnelle de cette puissance à la somme de telles sublimitez moins celle des profondeurs de ces mêmes forces: mais ce cas étant impossible, puisqu'il faudroit pour cela que ce poids comprît pour le moins plus du quart de la circonference de la Terre, on n'a pas crû qu'il fût nécessaire de l'exprimer ici.

C O R O L L A I R E V I.

On voit presentement que dans l'hypothese ordinaire, où l'on regarde les directions *AE, BE, CE, DE, &c.* comme paralleles entr'elles, chacune des sublimitez *El, Ee, Ed, Ea, &c.* déterminées sur *ZE* par chacune des proportionnelles *Eg, Ef, Ec, Eb, &c.* qu'on vient (*Cor. 5.*) de prendre égales à la somme des sublimitez moins celle des profondeurs des puissances appliquées à chacun des points *A, B, C, D, &c.* étant alors égales à ces mêmes proportionnelles; chacune des puissances ainsi appliquées à ce poids, sçavoir, *F, G, H, I, K, L, M, N, &c.* est toujours en ce cas à ce même poids *AD*, comme chacune de leurs proportionnelles à la somme de toutes leurs sublimitez moins celle de toutes leurs profondeurs.

COROLLAIRE VII.

D'où il suit que dans la même hypothèse des directions des graves paralleles entr'elles, la somme de toutes ces puissances est à ce poids comme la somme de leurs proportionnelles est à la somme de leurs sublimitez moins celle de leurs profondeurs : de sorte que s'il n'y en avoit que deux d'appliquées à chaque point de ce corps AD, dont l'une tirât à droit, & l'autre à gauche ; & que toutes celles de chaque côté fussent égales entr'elles, & avec des directions qui fissent avec celle du point auquel elles sont appliquées, des angles de chaque côté égaux entre-eux : la somme (Fig. 77.) des sublimitez, par exemple, $Ar + Af$, ou $Bq + Bt$, ou $Cp + Cu$, ou $Do + Dx$, &c. des deux puissances appliquées à celui qu'on voudra des nœuds A, B, C, D, &c. ou bien (Fig. 78.) la difference de la sublimité de l'une à la profondeur de l'autre, par exemple, $Ar - Af$, ou $Bq - Bt$, ou $Cp - Cu$, ou $Do - Dx$, &c. étant alors la même pour tous ces points, aussi-bien que les proportionnelles de ces puissances ; la somme de toutes ces puissances seroit alors au poids AD, comme la somme des proportionnelles de deux d'entr'elles appliquées à un même point, quel qu'il soit, est à la somme (Fig. 77.) de leurs sublimitez, ou (Fig. 78.) à la difference qui est entre la sublimité de l'une & la profondeur de l'autre.

COROLLAIRE VIII.

Ce qui fait enfin voir que si toutes les puissances F, G, H, I, K, L, M, N, &c. étoient égales entr'elles, & que toutes leurs directions fissent vers le haut avec celles des points où elles sont appliquées, des angles égaux entre-eux ; la somme de toutes ces puissances seroit alors au poids AD (Fig. 77.) comme une de leurs proportionnelles à une de leurs sublimitez, de quelque maniere qu'on les prenne : c'est-à-dire, comme le sinus total au sinus du complement de celui qu'on voudra de ces mêmes angles.

figure 75

Fig. 76

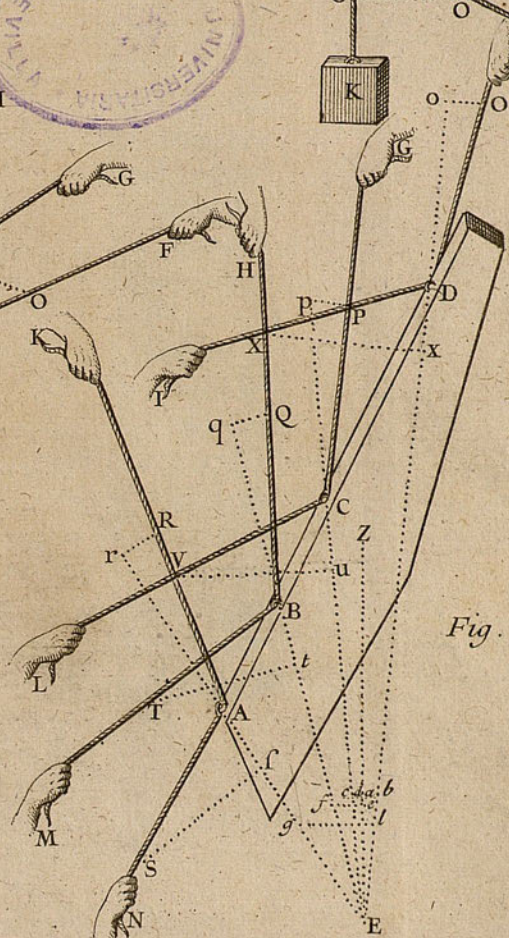
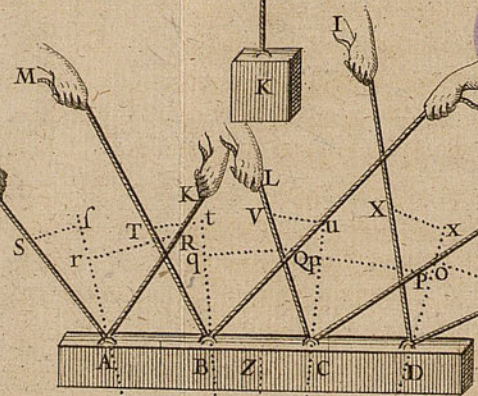
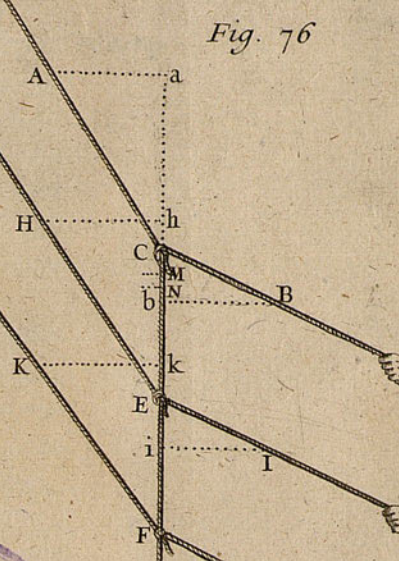
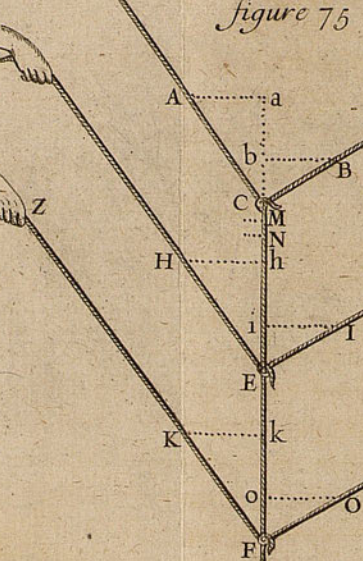


Fig. 77

Fig. 78

THEOREME VIII.

Quelques soient les directions des corps pesans, si deux poids quelconques K, L , sont suspendus à deux points aussi quelconques C, D , d'une corde lâche parfaitement flexible $ACDB$, attachée par les deux bouts à deux clous ou crochets A, B ; & qu'on fasse deux parallelogrammes $DCME, CDNF$, qui aient CD pour côté commun, & dont les diagonales CE, DF , soient sur les directions KC, LD , de ces deux poids prolongez de ce côté-là. FIG. 72.

I. Ces deux poids K, L , en ce cas d'équilibre, seront entre-eux comme ces diagonales correspondantes CE, DF .

II. Reciproquement si ces deux poids K, L , sont entr'eux en raison de ces deux diagonales CE, DF , ils demeureront en équilibre entr'eux dans la position donnée $ACDB$ de la corde.

DEMONSTRATION.

PART. I. Le Th. I. fait voir qu'en cas d'équilibre le poids K est à la force dont la partie CD de la corde est tirée de C vers D :: $CE. CD$. Et que la force dont cette même partie CD de la corde est tirée de D vers C , est au poids L :: $CD. CF$. Mais ces forces avec lesquelles cette même partie CD de la corde est tirée en même tems de C vers D , & de D vers C , sont (*Ax. 4.*) égales entr'elles en ce cas d'équilibre. Donc (en raison ordonnée) le poids K est ici au poids L , comme CE est à CF . *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. Les deux poids donnez K, L , devant se mettre tôt ou tard en équilibre entr'eux, à cause des résistances invincibles (*Hyp.*) des crochets A, B ; si pour cela la position de la corde ACB devoit être autre que la donnée $ACDB$, cette position donnée ne pouvant changer que par l'augmentation d'un de ses deux angles ACD, CDB , & par la diminution de l'autre, les directions des poids demeurant (*Hyp.*) toujours les mêmes, sans faire augmenter une des deux diagonales CE, DF , & sans faire diminuer l'autre; c'est-à-dire, sans faire changer le

Z ij

rapport que ces deux diagonales ont entr'elles dans la position donnée ACDB de cette corde ; les deux poids K, L, supposées en raison de ces deux diagonales , pourroient être en équilibre entr'eux, sans y être en ce rapport : ce que la part. 1. fait voir être impossible. Donc il est pareillement impossible qu'ils ne demeurent pas en équilibre entr'eux dans la position donnée ACDB de la corde ACB. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Si presentement on suppose à l'ordinaire que les directions EK, FL, de ces deux poids K, L, soient paralleles entr'elles, & qu'on prolonge BD, AC, jusqu'à leur rencontre en G, H ; les nouveaux parallelogrammes DECH, CFDG, qui en resulteront, rendant $DH=CE$, & $CG=DF$; la part. 1. qui vient de donner $K.L::CE.DF$. pour toutes sortes de directions des poids K, L, donnera pareill. ment $K.L::DH.CG$. pour ces paralleles-ci ; & consequemment $K \times CG = L \times DH$.

COROLLAIRE II.

Reciproquement si les deux poids K, L, de directions CK, DL, paralleles l'une à l'autre, sont entr'eux comme DH, CG ; la part. 2. fait voir qu'ils demeureront en équilibre dans la position donnée ACDB de la corde ACB : puisque $DH=CE$, & $CG=DF$, les rendroient entr'eux comme les diagonales correspondantes CE, DF.

COROLLAIRE III.

Il suit du Corol. I. que dans cette hypothese des directions paralleles entr'elles, les prolongemens CH, DG, des parties de corde AC, BD, compris entre les directions des poids K, L, doivent se diviser mutuellement en Q en raison reciproque de ces poids en équilibre (*Hyp.*) entr'eux ; c'est-à-dire, de maniere qu'elles rendent $QH.QC::K.L::QD.QG$. Et qu'au contraire les paralleles DE, CF, à ces prolongemens CH, DG, & comprises en-

tre les mêmes directions des poids K, L, se divisent mutuellement en P en raison directe de ces poids ; c'est-à-dire, de maniere qu'elles rendent $EP.PD :: K.L :: CP.PF$. Car le parallelisme supposé de ces directions EK, FL, des poids K, L, rendant les triangles CQG, HQD, semblables entr'eux, de même les triangles CPE, FPD, l'on aura ici $QH.QC :: QD.QG :: DH.CG$ (*Corol. 1.*) :: K.L. Et $EP.PD :: CP.PF :: CE.DE$ (*Th. 8.*) :: K.L. ainsi qu'on le vient de dire.

C O R O L L A I R E I V.

Soient presentement tant de poids quelconques K, L, M, N, &c. qu'on voudra, suspendus à autant de points aussi quelconques C, D, E, F, &c. de la corde lâche & parfaitement flexible ACDB entre ses deux points d'attache A, B. Si après avoir prolongé de CK vers FN, chacun des côtez AC, CD, DE, &c. du polygone ACDEFB que les poids font faire à cette corde, jusqu'à la rencontre en H, Q, S, &c. des directions (*Hyp.*) paralleles entr'elles DL, EM, FN, &c. immédiatement suivantes des poids L, M, N, &c. On prolonge de même de FN vers CK, les côtez BF, FE, ED, &c. jusqu'à la rencontre en R, P, G, &c. des directions aussi (*Hyp.*) paralleles entre-elles EM, DL, CK, &c. des poids M, L, K, &c.

Fig. 363.

Alors le Corol. 1. donnant

$$\left\{ \begin{array}{l} K.L :: DH.CG. \\ L.M :: EQ.DP. \\ M.N :: FS.ER. \end{array} \right.$$

L'on aura en mult. par ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} K.N :: DH \times EQ \times FS. CG \times DP \times ER. \\ L.N :: EQ \times FS. DP \times ER. \\ K.M :: DH \times EQ. CG \times DP. \end{array} \right.$$

Et toujours de même, quel que nombre de poids quelconques de directions paralleles entr'elles, qu'on suppose ainsi suspendus à autant de points aussi quelconques d'une corde lâche & parfaitement flexible, attachée par les ex-

trêment à deux clous ou crochets, telle qu'on suppose ici ACDEFB.

THEOREME IX.

Fig. 81.
82. 83. 84.
85.

I. La corde lâche & parfaitement flexible ACDB du précédent Th. 8. demeurant attachée par les deux bouts aux deux clous ou crochets A, B, soient encore deux puissances quelconques K, L, dirigées comme l'on voudra, appliquées à deux points aussi quelconques C, D, de cette corde entre ces deux clous ou crochets A, B. D'un point S pris à volonté dans le plan du polygone ACDB, que ces deux puissances avec ces deux clous font faire à cette corde, soient Se, Sf, Sg, perpendiculaires en e, f, g, aux trois côtes prolongez AC, CD, DB de ce polygone; de plus à une des directions des deux puissances K, L, par exemple, à la direction CK de la puissance K, soit faite EF perpendiculaire en K, & rencontrée en E, F, par Se, Sf, Sg, prolongées jusqu'à elle; enfin du point F soit FG perpendiculaire en l à la direction DL de l'autre puissance L, & qui rencontre Sg en G.

Cela fait, je dis qu'en cas d'équilibre la puissance K sera à la puissance L, comme EF est à FG; c'est-à-dire, $K. L :: EF. FG$.

II. Reciproquement la corde ACDB étant donnée de position, c'est-à-dire, le polygone qu'elle forme étant donné, si d'un point S pris à volonté dans le plan de ce polygone ACDB, on fait SE, SF, FG, perpendiculaires en e, f, g, à ses côtes AC, CD, DB, prolongez, & de rapports quelconques entr'elles; deux puissances K, L, dirigées suivant CK, DL, perpendiculaires aux bases EF, FG, des deux triangles ESF, FSG, & entr'elles comme ces bases, retiendront la corde ACDB dans cette position donnée, y demeurant en équilibre entr'elles.

DEMONSTRATION.

PART. I. Dans le cas d'équilibre que cette part. I. suppose, les deux forces dont chacun des cordons AC, CD,

DB, est tiré directement en sens contraires, soient appelées *e* chacune des deux forces dont le cordon AC est tiré de A vers C, & de C vers A; *f*, chacune des deux dont le cordon CD est tiré de C vers D, & de D vers C; *g*, chacune des deux dont le cordon DB est tiré de D vers B, & de B vers D.

Cela posé, puisque (*constr.*) les trois côtes SE, EF, SF, du triangle ESF sont ici perpendiculaires aux directions (prolongées s'il est nécessaire) CA, CK, CD, des trois forces *e*, K, *f*; ces trois côtes doivent être ici entr'eux (*Théoreme 1. Corollaire 7.*) comme ces trois forces. De même puisque (*constr.*) les trois côtes SF, FG, CS, du triangle FSG, sont pareillement ici perpendiculaires aux directions DC, DL, DB, des trois forces *f*, L, *g*; ces trois côtes doivent être aussi entr'eux comme ces trois forces. Donc K. *f* :: EF. FS. Et *f*. L :: FS. FG. Donc aussi (en raison ordonnée) K. L :: EF. FG. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. Premièrement, puisque les clous ou crochets A, B, sont (*Hyp.*) chacun d'une résistance invincible, il est manifeste que les puissances K, L, gardant toujours les mêmes directions CK, DL, doivent se mettre tôt ou tard en équilibre entr'elles dans quelque position de la corde ACB. Secondement, pour voir que cette position ne peut être autre que l'a donnée ACDB, il faut considérer qu'aucun des deux angles ACD, CDB, ne peut ici augmenter ni diminuer, à moins que l'autre au contraire ne diminue ou augmente en même tems. Mais si l'angle, par exemple, ACD augmentoit, la direction CK demeurant (*Hyp.*) la même, son complément ESF (à deux droits) diminueroit; les collatéraux ACK, DCK, diminueroient aussi, la direction CK demeurant (*Hyp.*) la même; au contraire leurs compléments (à deux droits) SEF, SFE, augmenteroient l'un & l'autre: de sorte qu'alors le rapport de EF à FS, diminueroit. Au contraire l'angle CDB, qui diminueroit alors, feroit augmenter son complément FSG à deux droits, aussi-bien que ses collaté-

raux CDL, BDL, la direction DL demeurant (*Hyp.*) la même, & diminuer leurs complemens SFG, SGF, à deux droits : de sorte qu'alors le rapport de SF à FG diminueroit aussi.

Donc en cas de changement des angles ACD, CDB, les rapports de EF à FS, &c. FS à FG diminueroient tous deux ; & conséquemment le rapport de EF à FG diminueroit aussi. Donc les puissances K, L, supposées entr'elles dans ce dernier rapport, seroient alors en équilibre sans être entr'elles comme EF à FG ; ce que la part. 1. fait voir être impossible. Donc il est impossible aussi que ces deux puissances K, L, dirigées suivant CK, DL, perpendiculaires (*Hyp.*) à EF, FG, & entr'elles (*Hyp.*) comme ces lignes EF, FG, ne demeurent pas en équilibre entr'elles dans la position donnée ACDB de la corde ACB. *Ce qu'il falloit 2^o. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 86.
27. 32.

Soient presentement tant de puissances quelconques K, L, M, N, &c. qu'on voudra, appliquées suivant telles directions CK, DL, PM, QN, &c. qu'on voudra aussi, à autant de points quelconques C, D, P, Q, &c. de la corde lâche & parfaitement flexible ACDB attachée par les deux bouts à deux clous ou crochets A, B, & en équilibre entr'elles. D'un point S pris à volonté sur le plan du polygone ACDPQB que ces puissances font former (*Th. 1. Corol. 11.*) à cette corde, soient sur tous les côtes AC, CD, DP, PQ, QB, &c. de ce polygone autant de perpendiculaires Se, Sf, Sg, Sh, Sr, &c. qui les rencontrent (prolongez ou non) en autant de points e, f, g, h, r, &c. Après cela sur une quelconque CK des directions des puissances K, L, M, N, &c. soit menée une perpendiculaire EF qui la rencontre en E, & qui rencontre aussi en F, les droites Se, Sf, prolongées jusqu'à elle, s'il est nécessaire. Du point F soit FG perpendiculaire en G à la direction DL de la puissance suivante L, & qui rencontre Sg en G. De ce point G soit aussi GH perpendiculaire

diculaire en m à la direction PM de la puissance suivante M, & qui rencontre Sb prolongée en H. De ce point H soit pareillement HR perpendiculaire en n à la direction QN de la puissance suivante N, & qui rencontre Sr prolongée en R; & toujours de même, quelque nombre de puissances quelconques qu'il puisse y avoir ici en équilibre ainsi entr'elles.

Cela fait, il suit de la part. 1. du présent Th. 9. qu'en cas d'équilibre entre toutes ces puissances K, L, M, N, &c. elles seront entr'elles comme les lignes correspondantes EF, FG, GH, HR, &c. perpendiculaires (*Hyp.*) à leurs directions. Car l'équilibre supposé rendant ici le point P immobile comme s'il étoit fixe ainsi que le point A, la part. 1. du présent Th. 9. fait voir que $K.L::EF.FG$. Le même équilibre rendant pareillement les points C, Q, immobiles comme s'ils étoient fixes, cette part. 1. du présent Th. 9. donnera de même $L.M::FG.GH$. Par la même raison elle donnera pareillement $M.N::GH.HR$. Et toujours de même, quelque nombre de puissances quelconques dirigées à volonté, qu'on suppose ici en équilibre entr'elles.

$$\text{Donc } \left\{ \begin{array}{l} K.L::EF.FG. \\ L.M::FG.GH. \\ M.N::GH.HR. \\ \text{\&c.} \end{array} \right.$$

Par conséquent (en raison ordonnée) toutes ces puissances K, L, M, N, &c. seront ici entr'elles comme les lignes correspondantes EF, FG, GH, HR, &c. perpendiculaires à leurs directions. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE II.

Toutes ces lignes EF, FG, GH, HR, &c. étant ici (*constr.*) perpendiculaires en k, l, m, n , &c. aux directions CK, DL, PM, QN, &c. de toutes les puissances K, L, M, N, &c. chacune à chacune; il est manifeste

que si ces directions sont toutes paralleles entr'elles, comme dans la Fig. 88. toutes leurs perpendiculaires EF, FG, GH, HR, &c. ne feront alors ensemble qu'une seule & même ligne droite OI, de laquelle elles seront autant de parties. Donc (Corol. 1.) les puissances K, L, M, N, &c. supposées en équilibre entr'elles, seront aussi pour lors entr'elles comme les parties correspondantes EF, FG, GH, HR, &c. de la droite OI perpendiculaire à toutes leurs directions. D'où l'on voit dans la Fig. 88. que des poids K, L, M, N, &c. de directions paralleles entr'elles, & ainsi en équilibre entr'eux, seroient aussi entr'eux comme ces parties correspondantes EF, FG, GH, HR, &c. de la droite OI perpendiculaire à leurs directions.

COROLLAIRE III.

Fig. 86.
87. 88.

Le reciproque des deux précédens Corol. 1. 2. se démontrera comme la part. 2. de ce Théoreme-ci : sçavoir, que la corde ACDPQB étant donnée de position, c'est-à-dire, le polygone quelconque qu'elle forme, étant donné, si d'un point pris à volonté sur le plan de ce polygone, on mene SE, SF, SG, SH, SR, &c. perpendiculaires en *e, f, g, h, r*, &c. à ses côtez AC, CD, DP, PQ, QB, &c. & de rapports quelconques entr'elles; si l'on applique aux angles C, D, P, Q, &c. de ce polygone, suivant des directions CK, DL, PM, QN, &c. perpendiculaires aux bases (prolongées ou non) EF, FG, GH, HR, &c. des triangles ESF, FSG, GSH, HSR, &c. autant de puissances K, L, M, N, &c. lesquelles soient entr'elles comme ces bases; toutes ces puissances retiendront ensemble la corde ACB dans la position donnée ACDPQB, y demeurant en équilibre entr'elles.

Car premierement les clous ou crochets A, B, étant chacun (*Hyp.*) d'une résistance invincible, il est manifeste que toutes ces puissances doivent tôt ou tard se mettre en équilibre entr'elles dans quelque position de la corde ACB. Secondement, cette position ne peut être autre que

la donnée $ACDPQB$; puisque si quelqu'un de ses angles, par exemple, ACD , augmentoit ou diminuoit, un raisonnement semblable à celui de la démonstration de la part. 2. fera voir que quelqu'un des autres angles du polygone donné, diminueroit ou augmenteroit, & peut-être plusieurs: mais un nous suffit pour faire voir qu'alors les perpendiculaires EF, FG, GH, HR , &c. aux directions données des puissances K, L, M, N , &c. ne seroient plus en raison de ces puissances; & qu'ainsi ces mêmes puissances pourroient ici faire équilibre entr'elles, sans être en raison de ces lignes; ce qui est impossible par le Corol. 1. Donc il est pareillement impossible que ces puissances, telles qu'on les vient de supposer, ne demeurent pas en équilibre entr'elles dans la position donnée $ACDPQB$ de la corde ACB . *Ce qu'il falloit démontrer.*

C O R O L L A I R E IV.

Il suit de-là en particulier dans la Fig. 88. que des poids Fig. 88.
 K, L, M, N , &c. de directions paralleles entr'elles, appliqués aux angles C, D, P, Q , &c. d'un polygone quelconque $ACDPQB$ formé par une corde ACB de position donnée, & entr'eux comme les parties EF, FG, GH, HR , &c. marquées sur une droite OI perpendiculaire aux directions de ces poids, par les droites SE, SF, SG, SH, SR , &c. menées d'un point S pris à volonté sur le plan de ce polygone, perpendiculairement en e, f, g, h, r , &c. à ses côtes AC, CD, DP, PQ, QB , &c. prolongez ou non: il suit, dis-je, du précédent Corol. 3. que tous ces poids retiendront ensemble cette corde ACB dans cette position donnée $ACDPQB$ en équilibre entr'eux, ou qu'ils la lui donneroient, si elle ne l'avoit pas.

C O R O L L A I R E V.

Donc si le polygone étoit d'une infinité de côtes, c'est-à-dire, si la corde ACB formoit une courbe quelconque donnée $ACDPQB$, dont les tangentes fussent conséquemment les côtes infiniment petits prolongez AC, CD, DP ,

A a ij

PQ, QB, &c. de [ce polygone infinilatre ; que d'un point quelconque S pris à volonté sur le plan de ce polygone ou de cette courbe ACDPQB on supposât des perpendiculaires SE, SF, SG, SH, SR, &c. à toutes ces tangentes en *e*, *f*, *g*, *h*, *r*, &c. & qui rencontraient en autant de points E, F, G, H, R, &c. une droite quelconque OI perpendiculaire en *k*, *l*, *m*, *n*, &c. à des directions CK, DL, PM, QN, &c. paralleles entr'elles de poids K, L, M, N, &c. suspendus aux angles ou points C, D, P, Q, &c. de concours des tangentes contigues de la courbe donnée ACDPQB, & que ces poids fussent entr'eux comme les parties correspondantes EF, FG, GH, HR, &c. de la droite OI : il suit, dis-je, du précédent Corol. 4. que ces poids en cette raison, & ainsi appliqués à la corde ACB, la retiendroient ensemble dans la courbure donnée ACDPQB, ou la lui donneroient si elle ne l'avoit pas.

C O R O L L A I R E V I.

Fig. 29.

Cela étant, si la position donnée de la corde ACB étoit, par exemple, un arc quelconque de cercle ACDPQB, égal ou moindre que le quart de cette courbe, dont S fût le centre, & A le plus bas de tous les points, auquel elle fût attachée comme en B dans un plan vertical, & touchée par l'horizontale AI ou OI ; qu'aux extrêmités C, D, P, Q, &c. de ses parties égales infiniment petites AC, CD, DP, PQ, &c. de cet arc (qui regardé comme un polygone infinilatre regulier, ait ses points pour ses angles, & ses petites parties pour ses côtes) fussent suspendus autant de poids K, L, M, N, &c. de directions toutes perpendiculaires en *k*, *l*, *m*, *n*, &c. à la tangente horizontale OI, & qui fussent entr'eux comme les parties EF, FG, GH, HR, &c. marquées sur cette tangente par les secantes SE, SF, SG, SH, SR, &c. perpendiculaires aux milieux *e*, *f*, *g*, *h*, *r*, &c. des éléments égaux AC, CD, DP, PQ, QB, &c. de l'arc circulaire donné ACDPQB : si tout cela (dis-je) étoit ainsi, il suit du précédent Corol. 5. que ces poids K, L, M, N,

&c. ainsi en raison des différences EF, FG, GH, HR, &c. des tangentes AE, AF, AG, AH, AR, &c. des arcs circulaires Ae, Af, Ag, Ah, Ar, &c. retiendroient ensemble la corde ACB dans la position ou courbure circulaire donnée ACDPQB, ou la lui donneroient si elle ne l'avoit pas.

C O R O L L A I R E. VII.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans tous les Corollaires précédens, ces six Corollaires faisant voir que pour que les puissances K, L, M, N, &c. quelques directions qu'elles aient, retiennent ensemble la corde ACB dans la courbure quelconque donnée ACDPQB, ou qu'ils la lui donnent si elle ne l'a pas ; il faut que ces puissances K, L, M, N, &c. soient entr'elles comme les lignes EF, FG, GH, HR, &c. perpendiculaires à leurs directions, & terminées par des perpendiculaires menées d'un même point quelconque S, pris sur le plan de cette courbure ou polygone ACDPQB, à ses côtes AC, CD, DP, PQ, QB, &c. lesquels prolongez se trouvent tangentes de la courbe en laquelle ce polygone se réduit, lorsqu'il devient infinilatre, aux angles ou concours C, D, P, Q, &c. desquels côtes, pris deux à deux contigus, ces puissances sont appliquées : il suit nécessairement de

tous ces Corol. 1. 2. 3. 4. 5. 6. qu'alors $\frac{EF}{K}, \frac{FG}{L}, \frac{GH}{M}, \frac{HR}{N}$, &c. doivent être autant de fractions constantes égales entr'elles ; & reciproquement que lorsqu'elles seront telles, les puissances K, L, M, N, &c. ainsi appliquées doivent demeurer en équilibre entr'elles, & retenir la corde ACB dans la courbure qui aura donné les numérateurs de ces fractions en raison de ces puissances, ou lui donner cette courbure si elle ne l'a pas.

C O R O L L A I R E VIII.

Donc conformément aux Corol. 2. 4. 5. 6. lorsque les directions CK, DL, PM, QN, &c. des poids K, L, M, N, &c. sont paralleles entr'elles, comme dans les Fig. Aaũj

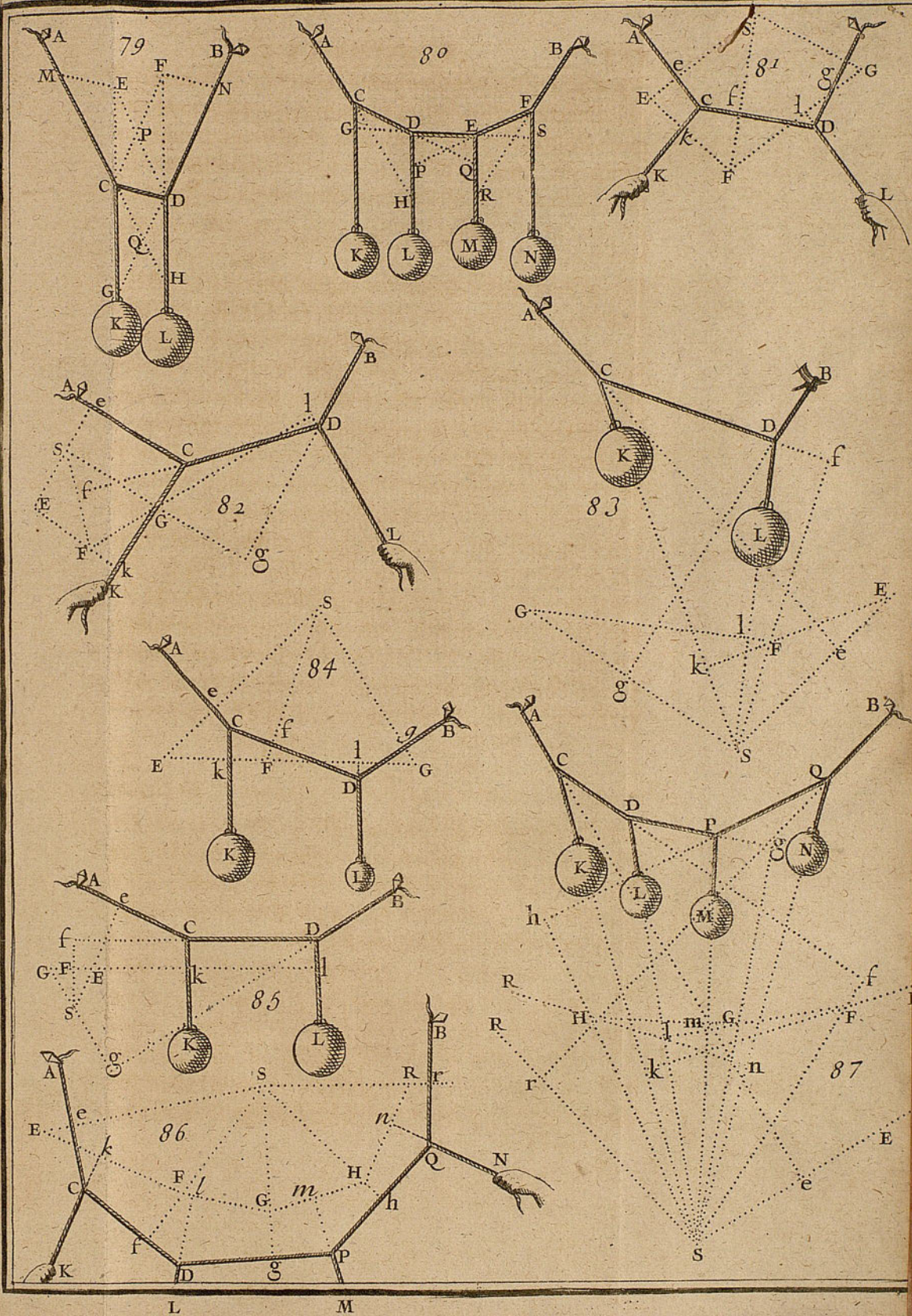
88. 89. les perpendiculaires EF, FG, GH, HR, &c. à ces directions, ne faisant alors qu'une seule & même ligne droite OI perpendiculaire à toutes ces mêmes directions ; il faut, pour que ces poids retiennent la corde ACB dans la courbure donnée ACDPQB non seulement (*Corol. 7.*) que les fractions $\frac{EF}{K}, \frac{FG}{L}, \frac{GH}{M}, \frac{HR}{N}, \&c.$

soient constantes & toutes égales entr'elles, mais encore que leurs numérateurs EF, FG, GH, HR, &c. soient autant de parties d'une même ligne droite OI perpendiculaire aux directions de ces poids, marquées sur elle par des perpendiculaires menées d'un même point quelconque S aux côtes du polygone ou aux tangentes de la courbe ACDPQB que la corde doit former par l'action de ces poids appliquez chacun au concours de deux tangentes contigues, c'est-à-dire, aux angles du polygone qui dégénere en cette courbe. Reciproquement lorsque ces fractions seront telles, les poids K, L, M, N, &c. ainsi suspendus aux angles ou concours C, D, P, Q, &c. des côtes ou tangentes contigues de ce polygone ou de cette courbe ACDPQB, doivent (*Corol. 7.*) demeurer en équilibre entr'eux, & retenir la corde ACB dans cette courbure, ou la lui donner si elle ne l'a pas.

THEOREME X.

FIG. 50.
21.

I. Deux puissances quelconques K, L, dirigées à volonté, & appliquées en deux points quelconques C, D, d'une corde lâche & parfaitement flexible ACDB, attachée par les deux bouts à deux clous ou crochets A, B, demeurant encore en équilibre entr'elles, comme dans les Th. 8. 9. d'un point quelconque S soient faites SE, SF, SG, parallèles aux trois côtes AC, CD, DB, du polygone ACDB que ces puissances font faire à cette corde ; & d'un point F pris aussi à volonté sur SF, soient menées FE, FG, parallèles aux directions CK, DL, des puissances K, L, jusqu'à ce que ces deux lignes rencontrent SE, SG, en E, G. Cela fait, je dis qu'en ce cas d'é-





équilibre les puissances K, L , seront entr'elles comme EF, FG , c'est-à-dire, $K. L :: EF. FG$.

II. Reciproquement la corde $ACDB$ étant donnée de position, c'est-à-dire, le polygone qu'elle forme étant donné, si d'un point S pris à volonté, on fait SE, SF, SG , parallèle aux trois côtéz AC, CD, DB , de ce polygone; & que d'un point F pris aussi à volonté sur SF , on mene deux droites quelconques FE, FG , qui rencontrent SE, SG en E, G : deux puissances K, L , qui seroient entr'elles comme ces deux lignes FE, FG , & qui auroient leurs directions CK, DL , parallèles à ces mêmes lignes, chacune à chacune, retiendront la corde $ACDB$ dans cette position donnée, y demeurant en équilibre entr'elles.

D E M O N S T R A T I O N.

PART. I. Soient encore appelez e, f, g , comme dans la démonstrat. de la part. 1. du Th. 9. les forces dont les cordons AC, CD, DB , sont ici tirez chacun également en sens directement contraires. Le triangle ESF ayant ici (*constr.*) les trois côtéz SE, EF, SF , parallèles aux directions CA, CK, CD , des trois forces e, K, f , (*Hyp.*) en équilibre entr'elles; ces trois côtéz du triangle ESF feront ici entr'eux (*Th. 1. Corol. 7.*) comme ces trois forces. De même le triangle SFG ayant pareillement (*constr.*) les trois côtéz SF, FG, GS , parallèles aux directions DC, DL, DB , des trois forces f, L, g , ces trois côtéz du triangle SFG feront aussi entr'eux (*Th. 1. Corol. 7.*) comme ces trois forces. Donc $K.f :: EF.FS$. Et $f.L :: FS.FG$. Par consequent (en raison ordonnée) $K. L :: EF.FG$. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

PART. II. Cette seconde se démontrera comme la seconde du Théoreme 9.

C O R O L L A I R E I.

Soient presentement tant de puissances K, L, M, N , Fig. 22.
&c. qu'on voudra appliquées suivant telles directions 23.
 CK, DL, PM, QN ; qu'on voudra aussi, à autant de

points quelconques C, D, P, Q, &c. de la corde lâche & parfaitement flexible ACB, & en équilibre entr'elles. D'un point quelconque S soient menées SE, SF, SH, SR, &c. parallèles aux côtez AC, CD, DP, PQ, QB, &c. chacune à chacun, du polygone ACBPQB que ces puissances K, L, M, N, &c. font former (*Th. 1. Cor. 11.*) à cette corde ACB. Soient aussi EF, FG, GH, HR, &c. parallèles aux directions CK, DL, PM, QN, &c. de ces mêmes puissances, & qui rencontrent SE, SF, SG, SH, SR, &c. en E, F, G, H, R, &c.

Cela fait, il suit de la part. 1. du présent Th. 10. qu'en ce cas d'équilibre entre toutes ces puissances K, L, M, N, &c. elles seront entr'elles comme les lignes EF, FG, GH, HR, &c. parallèles à leurs directions. Car l'équilibre supposé rendant ici le point D immobile comme s'il étoit fixe, ainsi que le point A, la part. 1. du présent Th. 10. donne $K.L :: EF.FG$. Le même équilibre rendant pareillement les points C, P, immobiles comme s'ils étoient fixes, cette part. 1. du présent Théor. 10. donnera de même $L.M :: FG.GH$. Par la même raison elle donnera aussi $M.N :: GH.HR$. Et toujours de même, quelque nombre de puissances quelconques dirigées à volonté qu'on puisse supposer ainsi en équilibre entr'elles.

$$\text{Donc } \left\{ \begin{array}{l} K.L :: EF.FG. \\ L.M :: FG.GH. \\ M.N :: GH.HR. \\ \text{\&c.} \end{array} \right.$$

Par conséquent (en raison ordonnée) toutes ces puissances K, L, M, N, &c. seront ici entr'elles comme les lignes correspondantes EF, FG, GH, HR, &c. parallèles à leurs directions.

COROLLAIRE II.

Fig. 23.

Toutes ces lignes EF, FG, GH, HR, &c. étant ici (*constr.*) parallèles aux directions CK, DL, PM, QN, &c. de toutes les puissances K, L, M, N, &c. chacune à cha-

cune;

une ; il est manifeste que si toutes ces directions sont parallèles entr'elles , toutes leurs parallèles EF , FG , GH , HR , &c. ne feront alors ensemble qu'une seule & même ligne droite OI , de laquelle elles feront autant de parties. Donc (*Corol. 1.*) les puissances K , L , M , N , &c. supposées en équilibre entr'elles , seront aussi pour lors entr'elles comme les parties correspondantes EF , FG , GH , HR , &c. de cette ligne droite OI parallèle à toutes & à chacune de leurs directions. D'où l'on voit dans la Fig. 93. que des poids K , L , M , N , &c. de directions parallèles entr'elles , & ainsi en équilibre entr'eux , seroient aussi entr'eux comme ces parties correspondantes EF , FG , GH , HR , &c. de la droite OI parallèle à leurs directions.

COROLLAIRE III.

Le reciproque des deux précédens *Corol. 1. 2.* suit de la part. 2. du présent Th. 10. & se démontrera comme le *Corol. 3.* du Th. 9. sçavoir , que la corde ACB étant donnée de position ACDPQB , c'est-à-dire , le polygone quelconque qu'elle forme , étant donné ; si d'un point quelconque S on mene SE , SF , SG , SH , SR , &c. parallèles à ses côtez AC , CD , DP , PQ , QB , &c. & de rapports quelconques entr'elles ; si l'on applique ensuite aux angles C , D , P , Q , &c. de ce polygone , suivant des directions CK , DL , PM , QN , &c. parallèles aux bases EF , FG , GH , HR , &c. des triangles ESF , FSG , GSH , HSR , &c. autant de puissances K , L , M , N , &c. lesquelles soient entr'elles comme ces bases ; toutes ces puissances retiendront ensemble la corde ACB dans la position donnée ACDPQB , en équilibre entr'elles ; ou elles la lui donneroient , si elle ne l'avoient pas. Cela , dis-je , se démontrera comme le *Corol.* du Th. 9, Fig. 92
93.

COROLLAIRE IV.

Il suit en particulier dans la Fig 93. que des poids K , L , M , N , &c. de directions parallèles entr'elles , appli- Fig. 93
B b

quées aux angles C, D, P, Q , &c. d'un polygone quelconque $ACDPQB$ formé par une corde ACB de position donnée, & entr'eux comme les parties EF, FG, GH, HR , &c. marquées sur une droite OI parallèle aux directions de ces poids, par les droites SE, SF, SG, SH, SR , &c. menées d'un point quelconque S parallèles aux côtes AC, CD, DP, PQ, QB , &c. de ce polygone: il suit, dis-je, du précédent Corol. 3. que tous ces poids retiendront ensemble la corde ACB dans la position donnée $ACDPQB$ en équilibre entr'eux; ou qu'ils la lui donneroient, si elle ne l'avoit pas.

COROLLAIRE V.

Donc si ce polygone étoit d'une infinité de côtes, c'est-à-dire, si la corde ACB formoit une courbe quelconque $ACDPQB$, dont les tangentes fussent conséquemment les côtes infiniment petits prolongez AC, CD, DP, PQ, QB , &c. de ce polygone infinilatere; que d'un point quelconque S on supposât des parallèles SE, SF, SG, SH, SR , &c. à toutes ces tangentes, & qui rencontraient en autant de points E, F, G, H, R , &c. une ligne droite quelconque OI , parallèle aux directions CK, DL, PM, QN , &c. des poids K, L, M, N , &c. suspendus aux angles ou points C, D, P, Q , &c. de concours des tangentes contigues de la courbe données $ACDPQB$, & que ces poids fussent entr'eux comme les parties correspondantes EF, FG, GH, HR , &c. de la droite OI : il suit, dis-je, du précédent Corol. 4. que ces poids en cette raison, & appliqués à la corde ACB , la retiendroient ensemble dans la courbure donnée, ou la lui donneroient, si elle ne l'avoit pas.

COROLLAIRE VI.

D'où l'on voit que si les points (infiniment proches les uns des autres) C, D, P, Q , &c. de cette corde ACB , jusqu'ici regardée comme sans pesanteur, avoient effectivement des pesanteurs de directions parallèles entre-

elles, & en raison des parties EF, FG, GH, HR, &c. marquées comme dans le Corol. 5. sur la droite OI parallèle à toutes ces directions; cette corde (*Hyp.*) parfaitement flexible ACB prendroit d'elle-même la courbure donnée ACDFQB.

COROLLAIRE VII.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans tous les Corollaires précédens, ces six Corollaires faisant voir que pour que les puissances K, L, M, N, &c. quelques directions qu'elles aient, retiennent ensemble la corde ACB dans une courbure quelconque donnée ACDFQB, il faut que ces puissances K, L, M, N, &c. soient entr'elles comme les lignes EF, FG, GH, HR, &c. parallèles à leurs directions, & terminées par des parallèles menées d'un même point quelconque S, aux côtes AC, CD, DP, PQ, QB, &c. de ce polygone, lesquels prolongez sont tangentes de la courbe en laquelle il se réduit quand il devient infinilatre, aux angles ou concours C, D, P, Q, &c. desquels côtes, pris deux à deux contigus, ces puissances K, L, M, N, &c. sont appliquées: il suit, dis-je, des Corol. 1. 2. 3. 4. 5. 6. qu'alors $\frac{EF}{K}, \frac{FG}{L}, \frac{GH}{M}, \frac{HR}{N}$, &c. doivent être autant de fractions constantes toutes égales entr'elles; & réciproquement que lorsqu'elles seront telles, les puissances K, L, M, N, &c. ainsi appliquées doivent demeurer en équilibre entr'elles, & retenir ensemble la corde ACB dans la courbure ACDFQB qui aura donné les numérateurs de ces fractions, ou lui donner cette courbure, si elle ne l'avoit pas.

COROLLAIRE VIII.

Donc conformément aux Corol. 2. 4. 5. 6. lorsque les directions CK, DL, PM, QN, &c. des poids K, L, M, N, &c. sont parallèles entr'elles, comme dans la Fig. 93. les parallèles EF, FG, GH, HR, &c. à ces directions, ne faisant plus alors qu'une seule & même ligne droite Bbij

OI parallèle à ces mêmes directions ; il faut pour que ces poids retiennent la corde ACB dans la courbure donnée ACDPQB, non seulement (*Corol. 7.*) que les fractions $\frac{EF}{K}, \frac{FG}{L}, \frac{GH}{M}, \frac{HR}{N}, \&c.$ soient constantes & toutes égales entr'elles, mais encore que leurs numérateurs EF, FG, GH, HR, &c. soient autant de parties marquées sur une même ligne droite OI parallèle aux directions de ces poids, par des parallèles menées d'un même point S aux côtez du polygone, ou aux tangentes de la courbe ACDPQB que la corde doit former : réciproquement lorsque ces fractions seront telles, les poids K, L, M, N, &c. ainsi suspendus aux angles ou concours C, D, P, Q, &c. des côtez ou tangentes contigues de ce polygone ou de cette courbure ACDPQB, doivent demeurer en équilibre entr'eux, & retenir la corde ACB dans cette courbure donnée, ou la lui donner, si elle ne l'a pas.

Lorsqu'on a parlé ci-dessus de courbures quelconques ACDPQB, données ou non, de la corde ACB, il est visible qu'on n'y a compris que des courbures telles que des puissances ou des poids qui lui seroient appliquez, lui pourroient donner ; & conséquemment toutes convexes du côté vers lequel tendent les poids ou les puissances qui la tirent en même sens.

THEOREME XI.

Fig. 94. Soit encore une corde lâche parfaitement flexible ACDPQB, attachée par ses extrémités à deux clous ou crochets A, B, laquelle soit tirée en C, D, P, Q, &c. par tant de puissances K, L, M, N, &c. qu'on voudra, en équilibre entr'elles suivant des directions quelconques EK, FL, GM, HN, &c. je dis qu'en ce cas d'équilibre la résistance du clou A sera toujours à celle du clou B, comme le produit des sinus des angles faits du côté de B par ces directions avec la corde ACDPQB, sera au produit des sinus de ce qu'elles font d'autres angles avec cette corde du côté de A.

DEMONSTRATION.

Soient e, f, g , &c. les forces de tensions dont les parties intermediaires CD, DP, PQ , &c. de la corde sont tirées suivant leurs longueurs par le concours des puissances K, L, M, N , &c. soient aussi A, B , les résistances que leur font les clous de ces noms. Soit enfin f la caractéristique ou la marque des sinus des angles que les directions des puissances font avec la corde qu'elles courbent en polygone quelconque $ACDPQB$.

$$\text{Cela posé, le Cor. 1. du Th. 2. donne } \left\{ \begin{array}{l} A. e :: \int ECD. \int ECA. \\ e. f :: \int FDP. \int FDC. \\ f. g :: \int GPQ. \int GPD. \\ g. B :: \int HQB. \int HQP. \\ \text{\&c.} \end{array} \right.$$

Donc (en multipliant par ordre) $A. B :: \int ECD \times \int FDP \times \int GPQ \times \int HQB \times \text{\&c.} \int ECA \times \int FDC \times \int GPD \times \int HQP \times \text{\&c.}$
Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Il suit de-là que si les directions EK, FL, GM, HN , &c. des puissances K, L, M, N , &c. divisent chacune en deux également chacun des angles ACD, CDP, DPQ, PQB , &c. de la corde, au travers desquels ces directions passent; cette corde sera bandée par tout d'égale force dans toute sa longueur $ACDPQB$; & les résistances A, B , des clous de ces noms, seront égales entr'elles; c'est-à-dire, qu'alors on aura $A=e=f=g=B=\text{\&c.}$ Car cette égalité d'angles en chacun des points C, D, P, Q , rendant $\int ECD = \int ECA$, $\int FDP = \int FDC$, $\int GPQ = \int GPD$, $\int HQB = \int HQP$, rendra aussi (suivant les premières analogies de la démonstration précédente) $A=e, e=f, f=g, g=B$, &c. Et par conséquent $A=e=f=g=B=\text{\&c.}$ ainsi qu'on le vient de dire.

COROLLAIRE II.

Fig. 95.

Si au contraire les directions EK , FL , GM , HN , &c. des puissances K , L , M , N , &c. sont toutes parallèles entr'elles; les résistances A , B , des clous de ces noms, seront en raison reciproque des sinus des angles ECA , HQB , que leurs cordons feront avec les directions EK , HN , des puissances K , N , qui leur sont plus voisines; c'est-à-dire, qu'alors on aura $A.B :: \sin HQB. \sin ECA$. Puisque ce parallélisme rendant $\sin ECD = \sin FDC$, $\sin FDP = \sin GPD$, $\sin GPQ = \sin HQP$, &c. l'analogie conclue dans la démonstration précédente, doit se réduire ici à $A.B :: \sin HQB. \sin ECA$.

THEOREME XII.

Fig. 96.

Soit encore la corde lâche & parfaitement flexible $ACPB$ attachée par ses extrémités à deux clous ou crochets A , B , & bandée en polygone quelconque $ACDPQB$ par tant & telles puissances K , L , M , N , &c. qu'on voudra, appliquées suivant telles directions CK , DL , PM , QN , &c. qu'on voudra aussi, aux angles ou points C , D , P , Q , &c. de la corde que ces puissances en équilibre entr'elles disposent ainsi en polygone $ACDPQB$. Soient R , S , T , &c. les points où les côtés prolongez PD , QP , BQ , &c. de ce polygone rencontrent son premier côté AC prolongé. Soient E le point où les directions KC , LD , prolongées se rencontrent; F celui où RE , MP , prolongées se rencontrent aussi; G , un pareil point de rencontre entr'elles de SF , NQ , prolongées de même, &c. Cela posé, je dis,

I. Que si N est (comme ici) la dernière des puissances supposées, la droite GT sera leur direction commune, c'est-à-dire (Déf. 7.) la direction de l'effort résultant du concours de toutes ces puissances K , L , M , N , contre les clous A , B .

II. Que cet effort commun sera aux résistances de ces clous A , B , comme le sinus de l'angle total ATB aux sinus des angles partiels GTB , GTA .

DEMONSTRATION.

PART. I. Les Corol. 19. & 20. du Lem. 3. font voir que l'effort résultant du concours des puissances K, L, est dirigé suivant ER ou FR ; que le résultant du concours de celui-ci & de la puissance M, est dirigé suivant FS ou GS ; que le résultant de celui-ci & de la puissance N est dirigé suivant GT ; & toujours de même. Donc s'il n'y a (comme ici) que les quatre puissances K, L, M, N, l'effort résultant de leur concours total d'action contre les clous A, B, aura sa direction suivant GT. *Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.*

PART. II. Donc toutes ces puissances K, L, M, N, ne font ensemble contre les clous A, B, que comme une seule égale à l'effort résultant de leur concours, laquelle appliquée en T suivant la direction GT de cet effort, à une corde ATB, seroit soutenue par ces deux clous A, B. Or (*Th. 1. Corol. 4.*) cette nouvelle puissance suivant GT, seroit alors aux résistances de ces mêmes clous A, B, comme le sinus de l'angle ATB aux sinus des angles GTB, GTA. Donc l'effort résultant du concours d'action de toutes les puissances K, L, M, N, contre les clous A, B, est ici aux résistances de ces clous, comme le sinus de l'angle total ATB est aux sinus des angles partiels GTB, GTA. *Ce qu'il falloit 2^o. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc en general (*part. 1. 2.*) si l'on prolonge le premier AC, & le dernier BQ, des côtes du polygone funiculaire supposé ACDPQB, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en quelque point T, & qu'on divise leur angle ATB en deux autres GTA, GTB, dont les sinus soient en raison reciproque des résistances des clous A, B, trouvées dans le Th. 11. c'est-à-dire, en deux autres angles GTA, GTB, tels que le sinus partial GTB soit au sinus de l'autre partial GTA, comme la résistance du clou A est à celle du clou B ; la droite GT qui divisera ainsi l'angle total ATB,

fera la direction de l'effort résultant du concours des puissances K, L, M, N , lequel effort (*Th. 1. Cor. 4.*) sera à chacune de ces résistances des clous A, B , comme le sinus de cet angle total à chacun des sinus des angles partiels GTB, GTA : de sorte que si l'on appelle A, B , ces résistances des clous de ces noms, & qu'on prenne \int pour la marque des sinus, l'un aura toujours ici $A. B :: \int GTB. \int GTA$. Donc,

1°. Les résistances A, B , des clous ou crochets de ces noms étant trouvées suivant le *Th. 11.* si depuis T sur leurs directions TA, TB , on prend $TV. TX :: A. B.$ & que de ces côtes TV, TX , on fasse le parallélogramme $TVXG$, l'on aura la diagonale GT pour la direction commune de toutes les puissances K, L, M, N , c'est-à-dire, de la force résultante de leur concours : puis on aura pour lors $A. B :: TV. TX$ (*Lemme 8. Corol. 2.*) :: $\int TGV. \int GTA :: \int GTB. \int GTA$. Ce que le nomb. 2. du *Corol. 1.* du *Lem. 3.* fait aussi voir.

2°. Reciproquement la direction commune GT des puissances K, L, M, N , c'est-à-dire, de la force (que j'appelle T) résultante de leur concours, étant trouvée suivant le présent *Th. 12.* le parallélogramme $TVGX$ d'une diagonale GT prise à volonté sur cette direction commune, & des côtes TV, TX , placez sur les directions TA, TB , des résistances A, B , donnera de même (*Lem. 3. Corol. 1. nomb. 2.*) VT, GT, XT , en raison de A, T, B ; & conséquemment $A. B :: TV. TX$ (*nomb. 2.*) :: $\int GTB. \int GTA$.

M. Bernoulli a trouvé la précédente direction commune GT d'une autre manière dans son Essay de la Manœuvre des Vaisseaux, chap. 15. prop. 3. où il l'appelle Direction moyenne.

COROLLAIRE II.

On vient de voir dans le *Corol. 1.* du *Th. 11.* que lorsque les directions EK, EL, FM, GN , des puissances K, L, M, N , divisent chacune en deux parties égales chacun

chacun des angles ACD , CDP , DPQ , PQB , qu'elles traversent ; les résistances des clous A , B , sont égales entr'elles. Donc alors (*Corol. 1.*) la direction GT de l'effort résultant du concours de toutes ces puissances, divise également en deux l'angle ATB compris entre les directions prolongées AC , BQ , de ces résistances ; & cet effort commun est à chacune de ces deux résistances, comme le sinus de l'angle ATB est au sinus de la moitié de cet angle.

C O R O L L A I R E III.

Le *Corol. 2.* du *Th. 11.* fait voir aussi que lorsque les directions EK , EL , FM , GN , des puissances K , L , M , N , sont toutes parallèles entr'elles, le sinus de l'angle GQB est au sinus de l'angle ECA , comme la résistance du clou A est à celle du clou B ; c'est-à-dire, en prenant encore A & B pour les noms de ces résistances, & \int pour la marque des sinus ; qu'alors $A. B :: \int GQB. \int ECA$. Or en general (*Corol. 1.*) la direction GT de l'effort résultant de toutes ces puissances K , L , M , N , quelques directions qu'elles aient, doit toujours diviser l'angle ATB en deux autres GTA , GTB , tels qu'on ait toujours $A. B :: \int GTB. \int GTA$. Donc en ce cas-ci de directions EK , EL , FM , GN , toutes parallèles entr'elles, l'on aura toujours $\int GQB. \int ECA :: \int GTB. \int GTA$. Ce qui fait voir qu'en ce cas-ci la direction GT de l'effort résultant du concours des puissances K , L , M , N , de telles directions, doit toujours être parallèle à ces mêmes directions, conformément au *Corol. 1.* du *Lem. 6.* qui le pouvoit aussi démontrer. Fig. 97.

C O R O L L A I R E IV.

Imaginons presentement que le précédent polygone funiculaire devienne infinilatre, & dégénere ainsi en une courbe $ACDB$, comme dans la Figure 98. par l'action d'une infinité de puissances appliquées à tous les points de cette corde, ou par les pesan- Fig. 98.
C.c

teurs particulieres quelconques de toutes ses parties; soient aussi imaginées aux points A, B, de suspension deux tangentes AT, BT, de cette courbe ACDB, lesquelles se rencontrent en quelque point T. Cela posé,

1°. Si les pressions ou tractions de cette corde ACDB sont toutes perpendiculaires à sa courbure, le Corol. 2. fera voir que la ligne GT, qui divisera en deux également l'angle ATB compris entre ces deux touchantes AT, BT, fera la direction de l'effort résultant de tout ce qu'il a de forces qui courbent ainsi cette corde.

2°. Si les pressions ou tractions sont toutes parallèles entr'elles, telles qu'on suppose d'ordinaire toutes celles qui résulteroient à cette corde ADCB de l'action sur elle des différentes pesanteurs de toutes ses parties; le Corol. 3. fait aussi voir que la ligne GT parallèle à toutes ces directions, seroit la direction de l'effort résultant du concours de toutes ces pesanteurs particulieres, ou d'autres forces quelconques qui, comme ces pesanteurs, agiroient sur cette corde ACDB suivant des directions toutes parallèles à celles-là.

THEOREME XIII.

FIG. 22.

Soit le précédent polygone funiculaire quelconque *ACDPQB* formé par l'action de tant de puissances *K, L, M, &c.* qu'on voudra, appliquées aux sommets *C, D, P, &c.* de ses angles suivant des directions *EK, EL, FM, &c.* lesquelles fassent presentement toutes d'un même côté, par exemple, vers *A*, avec les côtés adjacens *AC, CD, DP, PQ, &c.* des angles quelconques *ACE, CDE, DPF, PQG, &c.* tous égaux entr'eux, & dont les immédiatement voisines se rencontrent deux à deux en *E, F, &c.* si l'on appelle *e, f, g, &c.* les forces dont les parties *CD, DP, PQ, &c.* de la corde polygone *ACDPQB* sont bandées ou tirées chacune suivant sa longueur: l'on aura

$$\text{par tout ici ces puissances } K = \frac{e \times DC}{CE}, L = \frac{f \times DP}{ED}, M = \frac{g \times PQ}{GP}, \text{ \&c.}$$

DEMONSTRATION.

Puisque les angles ACE, CDE, DPF, PQG, &c. sont (*Hyp.*) tous égaux entr'eux, il est manifeste que si l'on prolonge AC, CD, DP, PQ, &c. vers R, S, T, V, &c. l'on aura les angles DCR=DEC, PDS=PFD, QPT=QGP, &c. Cela étant, & les côtez d'un triangle rectiligne quelconque étant toujours entr'eux (*Lem. 8. Cor. 2.*) comme les sinus des angles qui leur sont opposez,

Le Corol. 4. du Th. 1. donnera par tout ici

$$\begin{cases} K.e::\int ACD.\int ACE::\int DCR.\int CDE::\int CED.\int CDE::CD.CE. \\ L.f::\int CDP.\int CDE::\int PDS.\int DPF::\int PFD.\int DPF::DP.FD. \\ M.g::\int DPQ.\int FPD::\int QPT.\int GQP::\int QGP.\int GQP::PQ.GP. \\ \text{\&c.} \end{cases}$$

Desquelles Analogies résultent $K=\frac{e \times CD}{CE}$, $L=\frac{f \times DP}{FD}$,

$M=\frac{g \times PQ}{GP}$, &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

On voit de-là que si les côtez CD, DP, PQ, &c. du polygone funiculaire ACDPQB étoient en raison reciproque des forces e, f, g , &c. dont ils sont tirez chacun suivant sa longueur par le concours des puissances K, L, M, &c. Cette hypothese rendant par tout $e \times CD = f \times DP = g \times PQ = \text{\&c.}$ de grandeur constante, laquelle

soit prise pour l'unité, rendroit $K=\frac{1}{CE}$, $L=\frac{1}{FD}$, $M=\frac{1}{GP}$,

&c. c'est-à-dire, que les puissances K, L, M, &c. seroient alors en raison reciproque des lignes CE, FD, GP, &c. qui leur répondent.

COROLLAIRE II.

Fig. 106. Si presentement on suppose que le précédent polygone funiculaire devienne infinitatere, c'est-à-dire, une courbe quelconque APB par l'action d'une infinité de puissances qui lui soient appliquées en tous ses points suivant des directions toutes perpendiculaires à sa courbure, desquelles une soit (si l'on veut) celle GM de la puissance M perpendiculaire en P à la courbure de cette corde APB, laquelle perpendiculaire GM soit rencontrée en G par une autre QG perpendiculaire aussi à cette courbe en l'autre extrémité Q de son élément ou de sa partie infiniment petite PQ: la perpendicularité de ces deux droites GP, GQ, à la courbe APB en deux points P, Q, infiniment proches l'un de l'autre, leur faisant faire avec cette courbe des angles droits GPD, GQP, & conséquemment égaux entr'eux d'un même côté, si l'on prend encore g pour la force dont ce petit côté PQ du present polygone infinitatere APB, est tiré suivant sa longueur par l'action de tout ce qu'il y a ici de puissances qui donnent cette forme à cette corde; la démonstra-

tion précédente donnera ici la puissance $M = \frac{g \times PQ}{GP}$, &

ainsi de toutes les autres puissances, dans lesquelles valeurs le Corol. 1. du Th. 11. faisant voir que la force g fera par tout la même: de sorte que la longueur des éléments P, Q, ne faisant rien à cette force g, si on les prend aussi par tout les mêmes, c'est-à-dire, tous égaux entre-eux ou constans, & que le produit $g \times PQ$ ainsi rendu constant, y soit pris pour l'unité, l'on y aura ces puissances

$M = \frac{1}{GP}$, &c. c'est-à-dire, que les puissances M, &c. se-

ront alors par tout entr'elles en raison reciproque de leurs GP, &c. appelez vulgairement *rayons osculateurs*

de la courbe quelconque APB aux points P, &c. où ces puissances lui sont appliquées suivant ces directions perpendiculaires à sa courbure.

COROLLAIRE III.

Soient présentement deux cordes APB, ERF, courbées encore à volonté par l'action d'une infinité de puissances qui agissent toutes perpendiculairement sur elles en tous leurs points, de manière que pour peu qu'on augmentât les appliques M, T, en P, R, suivant les rayons osculateurs GP, HR, de ces courbes, elles casseroient ces cordes en ces points ou élemens PQ, RS, dont les plus grandes forces ou résistances possibles soient g , b , avec lesquelles ces puissances M, T, soient en équilibre, & comme à la veille de les surmonter. En ce cas le précédent

Fig. 108
101.

Corol. 2. donnera $M = \frac{g \times PQ}{GP}$, $T = \frac{b \times RS}{HR}$: de sorte que

l'on aura ici $\frac{g \times PQ \times T}{GP} = \frac{b \times RS \times M}{HR}$, d'où résulte $g : b ::$

$\frac{RS \times M}{HR} : \frac{PQ \times T}{GP} :: \frac{GP \times M}{PQ} : \frac{HR \times T}{RS}$. c'est-à-dire, que les plus

grandes forces ou résistances possibles g , b , des cordes APB, ERF, en P, R, seront ici en raison des fractions

correspondantes $\frac{GP \times M}{PQ}$, $\frac{HR \times T}{RS}$, ou (en prenant $PQ = RS$

dont la grandeur n'y fait qu'autant que les forces M, T, sont répandues le long de ces élemens, comme seroient celles de liqueurs qui les presseroient perpendiculairement dans toute leur longueur) comme les produits $GP \times M$, $HR \times T$. De sorte que s'il ne falloit ici que des puissances égales M, T, pour faire ainsi équilibre avec les plus grandes résistances possibles g , b , de ces cordes en P, R, ces plus grandes résistances ou forces g , b , en ces points, seroient alors comme les rayons osculateurs GP, HR, de ces courbes en ces mêmes points.

COROLLAIRE IV.

Si présentement on considère les courbes APB, ERF, comme des anneaux ou parties d'anneaux differens d'un tuyau, ou de tuyaux differens de bases quelconques, coupez horisontalement, & les puissances M, T, comme des efforts de liqueurs quelconques contenues dans ces tuyaux, lesquelles le pressent de dedans en dehors perpendiculairement en leurs élemens PQ, RS, avec des forces en équilibre avec les plus grandes résistances possibles g, b , des anneaux ou tuyaux à être rompus en ces endroits, de maniere que pour peu que ces efforts M, T, y augmentassent, ils y creveroient ces anneaux ou tuyaux; tout cela (dis-je) ainsi considéré, le Corol. 3. fait voir que les plus grandes résistances possibles g, b , de ces anneaux APB, ERF, y seroient entr'elles comme les fra-

ctions correspondantes $\frac{GP \times M}{PQ}, \frac{HR \times T}{RS}$, c'est-à-dire, $g.b::$

$\frac{GP \times M}{PQ} . \frac{HR \times T}{RS}$, Ainsi l'experience, & même le raisonne-

ment seul faisant voir que les efforts des liqueurs contre quoi que ce soit, sont toujours comme les produits de leurs pesanteurs spécifiques par leurs hauteurs au dessus des bases ou surfaces qu'elles pressent, & par ces bases; & consequemment que si l'on prend p, π , pour les pesanteurs spécifiques des liqueurs contenues dans les tuyaux dont APB, ERF, sont les anneaux ou parties d'anneaux, & b, β , pour les hauteurs que ces liqueurs y doivent avoir au dessus de PQ, RS, pour y faire équilibre avec les plus grandes résistances possibles g, b , de ces anneaux ou tuyaux à être rompus en ces endroits, pour des hauteurs (dis-je) telles que pour peu qu'on les augmentât, ces liqueurs y creveroient ces tuyaux; l'on y aura $M = bp \times PQ$, & $T = \beta \pi \times RS$, pour les efforts perpendiculaires M, T, sur les élemens PQ, RS, des anneaux APB, ERF, en équilibre avec les plus grandes résistances

g, b , que ces anneaux y puissent faire pour n'y point crever : la substitution de ces valeurs de M, T , dans l'Analogie précédente, la changera ici en $g. b :: GP \times bp. HR \times \beta \varpi$. c'est-à-dire, que les plus grandes forces ou résistances possibles g, b , de ces anneaux APB, ERF, ou de leurs tuyaux, pour n'être point rompus en PQ, RS, par l'effort M, T , des liqueurs qui tendent perpendiculairement à les y crever, & qui les y creveroient en effet (*Hyp.*) pour peu qu'on les augmentât, seront ici entr'elles comme les produits $GP \times bp, HR \times \beta \varpi$, des rayons osculateurs GP, HR, de ces anneaux APB, ERF, en ces endroits, multipliez par les hauteurs b, β , & par les pesanteurs spécifiques p, ϖ , des liqueurs qui les y pressent perpendiculairement : de sorte que,

1°. Si ces liqueurs sont de mêmes pesanteurs spécifiées p, ϖ , comme de l'eau qui seroit de la même dans les tuyaux dont les courbes APB, ERF, feroient des anneaux ou des parties d'anneaux ; l'on y aura $g. b :: GP \times b. HR \times \beta$. c'est-à-dire, que les plus grandes forces ou résistances possibles g, b , de ces anneaux pour ne point crever en PQ, RS, y feroient comme les produits de leurs rayons osculateurs GP, HR, en ces endroits, multipliez par les hauteurs b, β , des liqueurs qui les y pressent perpendiculairement, & qui les y creveroient (*Hyp.*) pour peu que ces hauteurs de liqueurs au dessus des endroits y fussent augmentez.

2°. Si de plus on veut que ces hauteurs b, β , soient égales entr'elles, c'est-à-dire, si l'on veut ici $b = \beta$ outre $p = \varpi$; ces plus grandes forces ou résistances g, b , des tuyaux, ou de leurs anneaux APB, ERF, pour ne point crever en PQ, RS, seront entr'elles comme les rayons osculateurs GP, HR, de ces anneaux en ces endroits.

3°. Si l'on veut que ces tuyaux soient à l'ordinaire circulaires, & remplis d'eau, comme sont les tuyaux de conduite des fontaines ; leurs plus grandes forces ou résistances possibles g, b , pour ne point crever en PQ, RS, y seront comme les produits des hauteurs b, β , de l'eau dans

ces tuyaux au dessus de leurs anneaux APB, ERF, multipliées par les rayons de ces anneaux circulaires. De sorte que si les plus grandes hauteurs b, β , d'eau que ces plus grandes forces ou résistances possibles g, h , pussent soutenir sans que les tuyaux crevassent PQ, RS, étoient égales; ces plus grandes forces ou résistances g, h , en cet endroit, y seroient en raison des rayons ou des diamètres des anneaux circulaires APB, ERF, de ces tuyaux.

On voit assez que les courbes APB, ERF, pouvant être également prises pour des anneaux en differens endroits d'un même tuyau, ou de differens tuyaux; tout le précédent Cor. 4. convient également aux differens anneaux d'un même ou de differens tuyaux, de quelque nature ou grandeur de bases qu'ils soient.

COROLLAIRE V.

On appelle tuyaux de forces ou de résistances g, h , par tout égales, lorsque les plus grandes hauteurs b, β , d'eau qu'ils pussent soutenir sans crever, sont par tout égales entr'elles aux endroits PQ, RS, ou ils creveroient (*Hyp.*) pour peu qu'on augmentât ces hauteurs. Or le nomb. 2. du précédent Corol. 4. fait voir qu'en ce cas ces plus grandes forces ou résistances possibles g, h , de ces tuyaux, pour ne pas crever en aucun des endroits PQ, RS, sont entr'elles comme les rayons osculateurs GP, HR, en ces endroits de leurs sections horisontales APB, ERF. Donc des tuyaux sont de résistances égales par tout pour ne se point crever, lorsque leurs plus grandes forces ou résistances possibles g, h , y sont par tout en raison des rayons osculateurs de leurs sections horisontales aux endroits de ces plus grandes résistances. Or il est visible qu'en fait de tuyaux de même matiere les plus grandes forces ou résistances possibles à ne point crever, y sont comme la multiplicité de leurs fibres, c'est-à-dire, comme les épaisseurs de leurs anneaux de hauteurs égales. Donc pour que ces tuyaux de même matiere soient par tout & entr'eux de même force ou résistance à être crevez
par

par des liqueurs homogenes, il faut que leurs épaisseurs soient par tout en raison des rayons osculateurs en ces endroits de leurs sections horisontales ; & consequemment que leurs épaisseurs y soient comme leurs diamètres en ces endroits, lorsqu'ils sont circulaires.

S C H O L I E.

On voit assez de quelle utilité les deux derniers Corollaires 4. 5. sont pour juger de la force des tuyaux dans la conduite des eaux : ils pourroient me mener plus loin sur cette matiere, à laquelle la liaison des consequences m'a insensiblement conduit ; mais n'étant pas de mon sujet, je ne m'arrêterai ici qu'à faire remarquer que le Corollaire 2. d'où ces deux-là me sont venus par la médiation du Corollaire 3. pourroit encore se démontrer immédiatement sans le secours du present Théoreme 13. qui l'a donné.

Car si outre l'élément ou petit côté PQ du polygone infinilatre APB de la Fig. 100. on y en considere encore un autre DP prolongé vers T en tangente DT ou PT de cette courbe, & que GP, GQ, perpendiculaires (*Hyp.*) à ces deux petits côtes PQ, DP, y rendent les angles $GQP = GPD$, & $PGQ = QPT$; le point P se trouvant ici tiré par la puissance M contre les résistances de ces deux petits côtes, comme avec trois cordons PM, PQ, PD, le Corol. 4. du Th. 1. fera voir que la puissance M y doit être à la résistance g de petit côté ou cordon PQ, comme le sinus de l'angle total DPQ au sinus du partial GPD; c'est-à-dire, en prenant encore ici s pour la marque des sinus $M. g :: sDPQ. sGID :: sQPT. sGQP :: sPGQ. sGQP$

(*Lem. 8. Corol. 2.*) :: PQ. GP. Ce qui donne $M = \frac{g \times PQ}{GP}$

& le reste comme dans le Corol. 2.



SECTION III.

DES POULIES ET DES MOUFLES.

Soit que le centre de ces Poulies demeure fixe, ou qu'on le suppose mobile, & pour toutes les directions possibles des puissances ou des poids qui y seront appliqués.

DEFINITION XVIII.

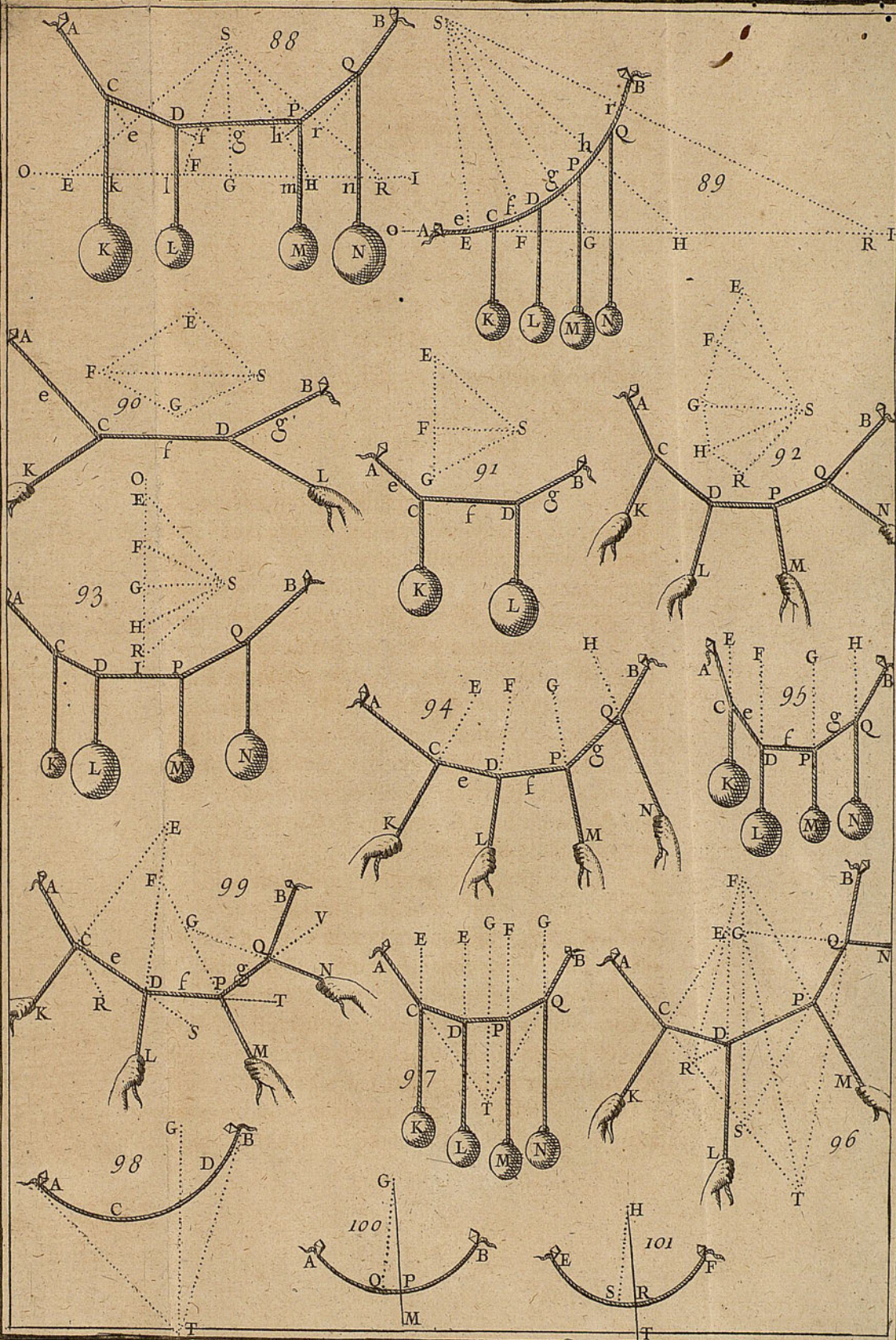
FIG. 102.
103. 104.
105.

LA *Poulie* est une Machine composée d'une Roue MBNC, traversée par son centre A d'un Essieu appelé *Goujon*, ou *Tourillon*, autour duquel elle est mobile par le moyen d'une corde PMBNR, appuyée sur sa circonférence ou sur son épaisseur : elle est presque toujours enchâssée ou retenue par le moyen de son Essieu dans une fente ou replis d'une pièce de bois ou de fer AB, appelée *Chappe* ou *Echarpe*, que cet Essieu (que nous regarderons à l'ordinaire comme une ligne) traverse aussi.

L'assemblage de plusieurs Roues ou Poulies ainsi enchâssées dans plusieurs fentes ou replis d'une même pièce de bois ou de fer, & mobiles (chacune sur son centre) par une seule & même corde, qui, en passant de l'une à l'autre, s'appuye sur toutes, s'appelle *Moufle*.

Soit qu'une même corde embrasse une ou plusieurs Poulies, ses parties touchantes de chaque Poulie, seront dans la suite appelées simplement *touchantes* de cette Poulie, ou même *cordes touchantes* de cette Poulie, comme si elles étoient autant de cordes différentes ; & les points où ces Poulies seront touchées par ces parties de cordes, seront simplement appelés leurs *points d'attouchement*.

Ces Poulies seront enfin appelées *fixes* ou *mobiles*, selon que leurs centres ou goujons le seront. Les Moufles





seront aussi appelées *fixes* ou *mobiles*, selon qu'elles seront attachées à des points fixes, ou qu'elles pourront s'en approcher ou s'en éloigner.

D E F I N I T I O N X I X .

La droite MN menée par les points M, N, d'attouchement de la circonférence du Cercle ou de la Poulie MBNC, & comprise entr'eux, s'appelle d'ordinaire *Corde* ou *Soutendante*, de chacun des arcs MBN, MCN; mais nous ne l'appellerons dans la suite que *Soutendante de l'arc MBN* embrassé par la corde PMBNR, pour distinguer cette droite MN de cette corde PMBNR, ou simplement *Soutendante*; sçavoir, celle qui passera par les points d'attouchement de la Poulie.

T H E O R E M E X I V .

Fondamental de la présente Section. 3.

Soient trois puissances quelconques D, P, R, dont la première D soit appliquée au centre mobile A d'une Poulie MBNC suivant une direction quelconque AD, & les deux autres P, R, aux extrémités d'une corde PMBNR appuyée sur cette Poulie. Fig. 102.
103. 104.
105.

I. S'il y a équilibre entre ces trois puissances D, P, R, ainsi appliquées, quelqu'angle MHN que fassent entr'elles les parties prolongées PM, RN, de cette corde, c'est-à-dire, les directions PM, RN, des deux puissances P, R; la direction AD de la troisième puissance D passera toujours par le point H de leur concours à travers de leur angle MHN, & sera dans un même plan avec elles.

II. En ce cas d'équilibre cette puissance D sera toujours à chacune des deux autres P, R, comme le sinus de cet angle MHR sera au sinus de sa moitié.

III. En ce même cas d'équilibre, si du centre A de la Poulie par les points M, N, où elle est touchée par les parties PM, RN, de la corde PMBNR, on mène les rayons AM, AN, avec la soutendante MN, le poids ou la puissance D sera aussi

D d ij

à chacune des puissances P, R , comme cette soutendante MN de l'arc MBN enveloppé par la corde $PMBNR$, est à chacun de ses rayons AM, AN .

IV. Reciproquement par rapport à la part. 2. si la direction AD de la puissance D passe par le concours H & à travers l'angle MHN des directions prolongées PM, RN , des puissances P, R , & que cette puissance D soit à chacune de ces deux-ci, comme le sinus de l'angle MHN compris entre leurs directions prolongées, sera au sinus de sa moitié : ces trois puissances en ce rapport, & ainsi appliquées, seront ici en équilibre entr'elles.

V. Reciproquement aussi par rapport à la part. 3. si la direction de la puissance D passe encore dans le plan & par le concours H des directions prolongées PM, RN , des puissances P, R , & que cette puissance D soit presentement à chacune de ces deux-ci comme la soutendante MN de l'arc MBN de la Poulie $MBNC$, embrassé par la corde $PMBNR$, est à chacun des rayons AM, AN , de cette Poulie : ces trois puissances en ce rapport, & ainsi appliquées, seront encore ici en équilibre entr'elles.

DEMONSTRATION.

PART. I. Les trois puissances D, P, R , étant ici (Hyp.) en équilibre entr'elles, les Corol. 13. 14. du Lemme 3. font voir qu'en quelque point H que les directions prolongées PM, RN , de deux quelconques P, R , de ces trois puissances concourent entr'elles, la direction AD de la troisième puissance D y doit aussi concourir, & être dans un même plan avec elles. Donc en ce cas d'équilibre, quelque angle MHN que fassent entr'elles les parties prolongées PM, RN , de la corde $PMBNR$, c'est-à-dire, les directions PM, RN , des puissances P, R , la direction AD de la troisième puissance D passera toujours par le point H de leur concours le long de leur plan, & à travers leur angle. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

PART. II. Sur une partie quelconque HG de la direction AD de la puissance D , prise de H vers A dans les

Fig. 102. 104. & du côté opposé dans les Fig. 103. 105. soit le parallélogramme HEGF, dont les côtez HE, HF, soient sur les directions HP, HR, des puissances P, R. Cela fait, les nomb. 1. 2. 3. du Corol. 2. du Lem. 3. font voir que dans l'équilibre ici supposé entre les puissances D, P, R, la puissance D doit être égale à la force résultante (*Lem. 3. Corol. 1. nomb. 1.*) du concours des deux autres contr'elle, & être dirigée suivant la même ligne que cette force en sens contraire: de sorte que la puissance D étant ici (*Hyp.*) dirigée suivant AD, la force résultante du concours des deux autres puissances P, R, contre celle-là, y fera aussi dirigée suivant AD, ou suivant HG diagonale du parallélogramme EF. Par conséquent cette force ou impression résultante du concours de ces deux puissances P, R, sera ici non seulement égale & directement opposée à la puissance D, mais encore elle sera (*Lem. 3. Corol. 5.*) à chacune des puissances P, R, comme la diagonale HG du parallélogramme EF est à chacun de ses côtez HE, HF, qui leur répondent sur leurs directions. Donc la puissance D sera de même ici à chacune des puissances P, R, comme cette diagonale HG à chacun de ces côtez HE, HF, du parallélogramme EF; c'est-à-dire (à cause de $HF = GE$) comme HG est à HE, GE. Or dans le triangle HEG ces trois côtez HG, HE, GE, sont (*Lem. 8. Corol. 2.*) comme les sinus des angles HEG, HGE, EHG, qui leur sont opposés; c'est-à-dire (à cause de GE, HF, supposées parallèles entr'elles) comme les sinus des angles EHF, FHG, EHG, ou PHR, RHA, PHA. Donc la puissance D est pareillement ici à chacune des puissances P, R, comme le sinus de l'angle total PHR est à chacun des sinus des angles partiels RHA, PHA. Mais PH, RH, étant ici tangentes en M, N, de la Poulie MBNC, & HA passant par son centre A, les angles RHA, PHA, y sont égaux entr'eux, & chacun la moitié du total PHR. Donc enfin la puissance D est ici à chacune des puissances P, R, en équilibre (*Hyp.*) avec elle, comme le sinus de l'angle

PHR que leurs directions font entr'elles, est au sinus de sa moitié. *Ce qu'il falloit 2^o. démontrer.*

Cette démonstration fait voir que les trois puissances D, P, R, sont ici en équilibre sur la Poulie MDNC, & dans le même rapport entr'elles, que si elles n'étoient en équilibre (Th. 1. Corol. 4.) qu'avec des cordes HD, HP, HR, nouées ensemble en H, & dirigées comme elles sont ici, c'est-à-dire, de manière que les angles PHD fussent égaux entr'eux comme ils le sont ici; & qu'ainsi l'équilibre des puissances entr'elles sur des Poulies, peut fort bien passer pour un cas de l'équilibre avec des cordes seulement; & conséquemment aussi le présent Th. 14. pour un seul cas du Th. 1. ce qui fournit encore une autre démonstration que voici de la même part. 2. du présent Th. 14.

AUTREMENT. Il est visible que tant que la puissance D demeure ainsi en équilibre avec les puissances P, R, sur la Poulie MBNC, non seulement cette Poulie demeure sans mouvement, mais encore la corde PMBNR demeure dessus sans glisser, ni se mouvoir non plus que si elle y étoit collée, ou physiquement unie depuis M jusqu'à N avec la partie MBN de sa circonférence; & les points M, N, de cette corde aussi fixes que si PM, RN, étoient deux cordes différentes qui y fussent séparément attachées suivant les tangentes de la Poulie en ces deux points-là: de sorte qu'on peut regarder ici cette Poulie MBNC comme un corps qui tend vers D suivant AD d'une force égale à celle de la puissance D, & retenu avec les cordes PM, RN, par les puissances P, R, en équilibre avec lui. Or en ce cas non seulement la ligne de direction AD passeroit (*Lem. 3. Corol. 13. 14.*) par le point H où concourent ces cordes prolongées, & le long de leur plan; mais encore cette Poulie MBNC regardée avec une telle impression, auroit (*Th. 1. Corol. 4.*) cette force à chacune des puissances P, R, qui la retiennent, comme le sinus de l'angle MHN à chacun des sinus des angles NHA, MHA. Donc en effet la ligne de direction AD de la force ou puissance D, avec laquelle la Poulie

MN est ainsi tirée contre les puissances P, R, en équilibre (*Hyp.*) avec elle, passe toujours par le point H, dans lequel leurs cordes prolongées concourent, & le long de leur plan, ainsi qu'on le vient de démontrer dans la part. 1. mais encore en ce cas d'équilibre entre ces trois puissances D, P, R, la première D appliquée au centre A de la Poulie, est toujours à chacune des deux autres P, R, comme le sinus de l'angle MHN est à chacun des sinus des angles NHA, MHA.

Or à cause que DA passe (*Hyp.*) par le centre A de la Poulie, & par H, & que MH, NH, en font deux touchantes en M, N; les deux angles NHA, MHA, sont chacun la moitié de l'angle MHN. Donc en la présente hypothèse d'équilibre entre les trois puissances D, P, R, sur la Poulie MBNC, la première D, dont la direction AD passe par le centre A de cette Poulie, est toujours à chacune des deux autres P, R, comme le sinus de l'angle MHN, ou PHR, que leurs directions ou cordes prolongées font entr'elles, est au sinus de sa moitié. *Ce qu'il falloit encore 2°. démontrer.*

PART. III. Puisque (*Hyp.*) M, N, sont les points où la Poulie est touchée par les parties PM, RN de la corde PMBNR, & que dans l'équilibre ici supposé entre les trois puissances D, P, R, ces parties de corde (directions des puissances P, R) prolongées concourent en H, sur la direction AD, perpendiculaire à la soutendante MN; les angles AMH, ANH, seront droits de même que ceux que fait la droite MN avec AD; & par conséquent l'on aura ici non seulement l'angle MAN, complément de MHN à deux droits, mais encore tous les angles AMN, AHM, AHN, ANM, égaux entr'eux. Donc (*Déf. 9. Corol. 2.*) le sinus de l'angle MAN sera ici au sinus de chacun des angles AMN, ANM, comme le sinus de l'angle MHN y est au sinus de chacune de ses moitiés AHM, AHN. Or en ce cas d'équilibre la puissance D est (*part. 2.*) à chacune des deux autres puissances P, R, comme le sinus de l'angle MHN est au sinus de chacune de ses moitiés.

AHN, AHM. Donc en ce cas d'équilibre cette puissance D doit aussi être à chacune des deux autres P, R, comme le sinus de l'angle MAN est au sinus de chacun des angles ANM, AMN, du triangle isocèle MAN, c'est-à-dire (*Lem. 8. Corol. 2.*) comme la soutendante MN est à chacun des rayons AN, AM, de la Poulie MBNC. *Ce qu'il falloit 3^o. démontrer.*

AUTREMENT. Puisque (*constr.*) les trois côtes AM, AN, MN, du triangle MAN, sont perpendiculaires aux trois directions PH, RH, AD, (chacun à chacune) des trois puissances P, R, D, en équilibre (*Hyp.*) entr'elles, & que ces trois puissances sont ici en équilibre comme sur un corps MBNC, auquel elles seroient appliquées en M, N, B; le Corol. 6. du Th. 1. fait voir que la puissance D y doit être à chacune des deux autres P, R, comme le côté MN du triangle MAN est à chacun de ses deux autres côtes AN, AM, c'est-à-dire, encore comme la soutendante MN de l'arc MBN de la Poulie, enveloppé de la corde PMBNR, qui soutient cette Poulie MBNC, est à chacun des rayons de cette même Poulie. *Ce qu'il falloit encore 3^o. démontrer.*

PART. IV. Puisque (*Hyp.*) les trois puissances D, P, R, appliquées comme ci-dessus à la Poulie MBNC, le sont de manière que la direction AD de la première D de ces puissances, passe par le concours H des directions PM, RN, prolongées des deux autres puissances P, R, le long de leur plan, & à travers leur angle MHN; que de plus cette première puissance D est à chacune des deux autres P, R, comme le sinus de l'angle MHN compris entre leurs directions ou cordes prolongées, est au sinus de sa moitié; & que (la direction AD passant par le centre A de la Poulie suivant son plan, & les deux autres PM, RN, la touchant en M, N,) chacun des angles MHA, NHA, est la moitié de l'angle MHN: ces trois puissances D, P, R, en action (*Hyp.*) les unes contre les autres sur la Poulie MBNC, seront ici entr'elles comme les sinus des angles MHN, NHA, MHA, que les directions ou cordes

cordes prolongées font entr'elles au point H, où elles concourent (*Hyp.*) toutes trois ensemble. Donc (*Th. 1. Corol. 15.*) ces trois puissances D, P, R, ainsi appliquées à la Poulie MBNC comme à un corps tiré de ces trois forces à la fois, doivent ici demeurer en équilibre entre-elles. *Ce qu'il falloit 4^o. démontrer.*

AUTREMENT. Si quelqu'une de ces trois puissances D, P, R, par exemple, D, ne suffisoit pas pour faire ici équilibre avec les deux autres P, R, suivant les directions supposées, soit en sa place telle autre puissance B qu'on voudra, qui appliquée (comme elle) suivant AD, y suffise. La part. 2. fait voir que cette puissance B seroit alors à chacune des deux autres P, R, comme le sinus de l'angle MHN est au sinus de sa moitié, c'est-à-dire (*Hyp.*) comme la puissance D est à chacune de ces deux puissances P, R; & que par conséquent cette puissance D seroit égale à l'autre B substituée en sa place. Donc ayant ici (*Hyp.*) la même direction AD qu'elle, cette puissance D seroit aussi (*ax. 2.*) équilibre avec les deux autres P, R.

Si l'on vouloit que ce fût une de ces deux-ci, par exemple, P, qui ne suffît pas pour leur faire faire équilibre avec la troisième D; l'on n'auroit qu'à supposer de même en la place de P suivant sa direction PM quelque autre puissance K, qui y suffît, & l'on trouveroit pareillement que cette nouvelle puissance K lui seroit égale; & conséquemment que la puissance P, aussi-bien que K, seroit équilibre avec les deux autres R, D.

Donc les trois puissances D, P, R, appliquées comme on les suppose ici, à la Poulie MBNC, & entr'elles (*Hyp.*) comme les sinus de l'angle MHN & de ses moitez, seroient ici en équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit encore 4^o. démontrer.*

PART. V. Puisque (*Hyp.*) les directions prolongées DA, PM, RN, des puissances D, P, R, concourent ici toutes trois en H dans un même plan, & que (*Hyp.*) M, N, sont les points où la Poulie MBNC est touchée par les

parties PM , RN , de la corde $PMBNR$; l'on aura ici (comme dans la démonst. 1. de la part. 3.) le sinus de l'angle MHN au sinus de chacune de ses moitiés AHM , AHN , comme le sinus de l'angle MAN est au sinus de chacun des angles AMN , ANM , du triangle MAN , c'est-à-dire (*Lem. 8. Corol. 2.*) comme la soutendante MN est à chacun des rayons AN , AM , de la Poulie $MBNC$; & conséquemment aussi (*Hyp.*) comme la puissance D est à chacune des puissances R , P . Donc (*part. 4.*) ces trois puissances seront encore ici en équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit 5°. démontrer.*

AUTREMENT. Cest trois puissances D , P , R , étant ici (*Hyp.*) entr'elles comme les côtes MN , AM , AN , du triangle MAN , perpendiculaires (*Hyp.*) à leurs directions AD , PM , RN , & en action les unes contre les autres sur la Poulie $MBNC$ comme sur un corps auquel elles seroient appliquées en B , M , N ; le *Corol. 19. du Th. 1.* fait voir que ces trois puissances D , P , R , doivent encore ici demeurer en équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit encore 5°. démontrer.*

Cette part. 5. se pourra encore démontrer (si l'on veut) par un raisonnement semblable à celui de la seconde démonstration de la part. 4.

COROLLAIRE I.

La part. 2. faisant voir qu'en cas d'équilibre sur la Poulie $MBNC$ entre les puissances D , P , R , la première D appliquée au centre A de la Poulie, est toujours à chacune des deux autres P , R , appliquée à la corde $PMBNR$ qui passe sur cette Poulie, comme le sinus de l'angle MHN compris entre les directions de ces deux puissances P , R , est au sinus de sa moitié, fait voir que la puissance D est toujours alors en même raison à chacune de ces deux mêmes puissances P , R ; & conséquemment que ces deux-ci sont toujours alors égales entr'elles.

Cela suit aussi de la part. 3. laquelle en ce cas d'équilibre donnant toujours la puissance D à chacune des deux

autres P, R , comme la soutendante MN à chacun des rayons AM, AN , de la Poulie $ABMC$, donne aussi toujours alors ces deux puissances P, R , entr'elles comme ces deux rayons ; & conséquemment toujours alors égales entr'elles.

C O R O L L A I R E II.

De ce qu'en cas d'équilibre sur la Poulie $MBNC$, la puissance D est toujours (*part. 2.*) à chacune des puissances P, R , comme le sinus de l'angle MHN compris entre les directions de ces deux puissances-ci, est au sinus de sa moitié ; il suit (comme dans le *Corol. 10. du Th. 1.*) que lorsque ces directions PM, RN , sont parallèles entr'elles, & conséquemment aussi (*Lem. 6. Corol. 1.*) à la direction AD de la puissance D , le sinus de l'angle total MHN se trouvant alors (*Lem. 7.*) seul égal à la somme des sinus des deux angles partiels MHA, NHA , moitié de ce total MHN ; la puissance D doit pareillement être alors seule égale à la somme des deux autres P, R , & conséquemment (*Corol. 1.*) être alors double de chacune d'elles, ou chacune d'elles être alors moitié de celle-là.

Cela suit aussi de la *part. 3.* suivant laquelle la puissance D en équilibre avec les puissances P, R , est toujours à chacune d'elles comme la soutendante MN de l'arc enveloppé MBN de la Poulie est à chacun de ses rayons AM, AN . Puisque ce parallélisme entr'elles des directions PM, RN , de ces deux puissances P, R , confondant cette soutendante MN avec ces deux rayons AM, AN , alors bout à bout en ligne droite, & la rendant ainsi pour lors égale à leur somme, doit aussi rendre alors la puissance D égale à la somme des deux autres P, R ; & conséquemment (*Corol. 1.*) être double de chacune d'elles.

C O R O L L A I R E III.

Pour en tout autre cas, c'est-à-dire, tant que les directions PM, RN , ne sont point parallèles entr'elles, ou

que prolongées elles font entr'elles quelque angle fini MHN, & conséquemment aussi (*part. 1.*) les finis MHA, NHA, avec la direction AD de la puissance D; cette troisième puissance D est toujours moindre (*part. 2.*) que leur somme $P+R$, ou que le double (*Corol. 1.*) de chacune: puisqu'alors le sinus de l'angle total MHN est toujours moindre (*Lem. 8. Corol. 7.*) que la somme des sinus des angles partiels MHA, NHA.

Cela suit aussi de la *part. 3.* puisqu'alors la soutendante MN de la Poulie MBNC est toujours alors moindre que la somme $AM+AN$ de ses rayons AM, AN; & que cette *part. 3.* donne toujours alors $D. P+R :: MN. AM+AN$.

COROLLAIRE IV.

En ce cas d'équilibre non seulement la puissance D est toujours moindre (*Corol. 3.*) que la somme $P+R$ des deux autres P, R, tant que leurs directions ou cordes ne sont point parallèles entr'elles; mais encore (*Corol. 1. d'ici, & Lem. 8. Cor. 6.*) d'autant moindre (quoiqu'en raison différente) que l'angle MHN de ces directions ou cordes prolongées est plus obtus.

La *part. 3.* fait voir la même chose en ce que plus cet angle MHN est obtus, plus son complément MAN (à deux droits) est aigu; & conséquemment plus aussi la soutendante MN est moindre que la somme $AM+AN$ des rayons AM, AN, de la Poulie MBNC: de sorte que cette *partie 3.* donnant toujours ici $D. P+R :: MN. AM+AN$. elle y donnera toujours aussi D d'autant moindre, que $P+R$ (quoiqu'en raison différente) que l'angle MHN y sera plus obtus.

COROLLAIRE V.

Donc cet angle MHN pouvant s'ouvrir ou augmenter de plus en plus à l'infini, jusqu'à ce que les directions ou cordes PM, RN, des puissances P, R, se trouvent en ligne droite; ces deux mêmes puissances P, R, peuvent faire ensemble équilibre avec une infinité d'autres ap-

pliquées une à une en la place de la troisième puissance D suivant sa direction AD, plus petites, & plus petites à l'infini, selon que cet angle MHN s'ouvrira de plus en plus.

C O R O L L A I R E V I.

De-là & du Corol. 2. on voit que la puissance D peut diminuer à l'infini, & cependant faire toujours équilibre avec les mêmes puissances P, R, à mesure que l'angle MHN compris entre leurs directions ou cordes prolongées PM, RN, deviendra plus grand; mais qu'en ce cas d'équilibre cette puissance D ne peut jamais être plus grande (Corol. 1. d'ici & Lem. 8. Corol. 6.) que la somme $P+R$ de ces deux-là; cette puissance D sera égale à cette somme $P+R$ (Corol. 2.) lorsque les directions PM, RN, des puissances P, R, se trouveront parallèles entr'elles; & depuis cette égalité cette puissance D diminuera à l'infini (Corol. 5.) à mesure que l'angle MHN augmentera, jusqu'à devenir même nulle ou zero, lorsque cet angle se trouvera infiniment obtus, c'est-à-dire (Def. 11.) lorsque les directions PM, RN, des puissances P, R, supposées toujours les mêmes, se trouveront en ligne droite.

C O R O L L A I R E V I I.

Donc en tous ces cas d'équilibre differens à l'infini, les puissances P, R, étant toujours (Corol. 1.) égales entr'elles, & conséquemment leur somme double de chacune d'elles; il n'y en a qu'un seul où la puissance D puisse être double de chacune de ces deux-là, sçavoir (Cor. 2.) celui où les directions PM, RN, de ces deux puissances égales P, R, sont parallèles entr'elles; & dans tous les autres (Corol. 3.) cette puissance D sera toujours plus petite que le double de chacune de ces deux-là, & d'autant plus petite (Corol. 4. que l'angle MHN fera plus ouvert ou plus obtus.

COROLLAIRE VIII.

Présentement si au lieu de la puissance ou du poids D en équilibre avec les puissances P, R, on attache la corde AD à quelque clou, il est visible que ce clou feroit la même résistance contre les puissances P, R, que fait présentement le poids ou la puissance D; que la direction de la corde AD seroit encore ici la même qu'auparavant, & que la résistance du clou y feroit égale à celle du poids ou de la puissance D. D'où il suit,

1°. Que lorsqu'une Poulie sur laquelle deux puissances sont équilibre, comme ici P, R, est suspendue ou retenue par une corde telle qu'est ici AD, cette corde se dirige toujours en sorte (*part. 1.*) qu'elle divise en deux également l'angle MHN des tangentes de cette Poulie touchée aux points M, N, par les directions ou cordes PM, RN, de ces deux puissances.

2°. La résistance ou la charge du clou auquel est attachée la corde AD qui soutient cette Poulie MBNC contre l'action des puissances P, R, est à chacune d'elles (*part. 2.*) comme le sinus de l'angle MHN de leurs directions ou cordes prolongées PM, RN, est au sinus de sa moitié; & aussi (*part. 3.*) comme la soutendante MN de l'arc MBN enveloppé de la corde PMBNR, est au rayon AM, AN de la Poulie MBNC.

3°. Par conséquent tant que l'angle MHN seroit fini, la charge ou la résistance de ce clou auquel la corde AD seroit attachée, seroit (*Corol. 3.*) moindre que la somme des puissances P, R, & moindre de plus en plus (*Corol. 4.*) que cette somme $P+R$, à mesure que cet angle MHN deviendroit plus grand: mais si les directions ou cordes PM, RN, de ces deux puissances, lesquelles prolongées font cet angle, se trouvent parallèles entre-elles, la charge ou la résistance de ce même clou sera égale (*Corol. 2.*) à la somme de ces deux puissances P, R, & conséquemment alors (*Corol. 1.*) double de chacune d'elles.

COROLLAIRE IX.

Si la Poulie MBNC au lieu d'être arrêtée en D, ou en quelque autre point de la corde AD, qui passe par son centre A, avoit seulement ce centre A fixe autour duquel elle fut mobile, les puissances P, R, agissant encore sur cette Poulie de la même manière qu'auparavant, & cette Poulie leur faisant aussi encore la même résistance qu'elle leur faisoit, lorsqu'elle étoit retenue par la corde AD; elle doit en recevoir encore la même impression, & suivant la même direction AD qu'auparavant; ainsi l'effort commun des puissances P, R, sur cette Poulie MBNC, ne tend encore qu'à la mouvoir suivant DA avec la même force commune dont elles tiroient auparavant contre le poids ou la puissance D, ou contre le clou qu'on vient de supposer (*Cor. 8.*) en la place de ce poids ou de cette puissance D. Donc la charge de cette Poulie MBNC, lorsque le centre A en est fixe, ou la résistance de son goujon fixe A, autour duquel seulement elle est mobile, est toujours (*part. 2.*) à chacune des puissances P, R, (en équilibre sur cette Poulie, & au concours d'action desquelles son goujon fixe A. résiste) comme le sinus de l'angle MHN compris entre leurs directions ou cordes prolongées PM, RN, est au sinus de sa moitié, ou (*part. 3.*) comme la soutendante MN est au rayon AM ou AN de cette Poulie MBNC; & conséquemment aussi (*Corol. 3.*) cette charge ou résistance de ce goujon fixe A, est toujours moindre que la somme de ces deux puissances P, R, excepté dans le cas de leurs directions parallèles entr'elles, dans lequel cette charge de la Poulie MBNC est toujours (*Corol. 2.*) égale à la somme de ces deux puissances P, R, & conséquemment (*Corol. 1.*) double de chacune d'elles.

COROLLAIRE X.

De-là & du Corol. 5. il suit que plus l'angle MHN compris entre les parties de la corde PM, RN, prolon-

gées du côté de H, sera grand, moins sera grande la charge de la Poulie MBNC, ou de son centre A, soit que ce centre en soit fixe, ou qu'il soit mobile: de sorte que cet angle MHN peut devenir si obtus que la Poulie MBNC ou son centre A ne sera chargé que si peu qu'on voudra des puissances P, R; jusques-là même que cette Poulie pourroit être soutenue contre ces deux puissances par une troisième D indéfiniment petite, c'est-à-dire, moindre que quelque poids donné que ce soit: il ne faut pour cela (*Corol. 4.*) qu'ouvrir l'angle MHN compris entre les directions des parties de corde PM, RN, jusqu'à ce qu'enfin son sinus soit à celui de sa moitié, ou la soutendante MN au rayon, AM de la Poulie, en moindre raison que le poids donné n'est à chacune des puissances P, R.

COROLLAIRE XI.

Au contraire on peut rendre cet angle MHN si aigu que la puissance ou le poids D appliqué au centre A de la Poulie MBNC, ou quelqu'autre en sa place, devra être plus grand que chacune des puissances P, R, pour faire équilibre avec elles. Mais ce poids ne peut pas ainsi augmenter à l'infini; car ne pouvant jamais (*Corol. 6.*) être plus grand que lorsque cet angle MHN ou PHR est infiniment aigu, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 1.*) lorsque les parties PM, RN, de corde sont parallèles entre-elles; & le sinus de cet angle MHN, n'étant encore alors (*Corol. 4.*) que double du sinus de sa moitié, & la soutendante MN seulement double alors du rayon AM de la Poulie, ce poids ne peut être tout au plus (*Corol. 1.*) que double de chacune des puissances P, R.

COROLLAIRE XII.

Ce qui fait encore voir, comme dans le Corol. 7. que sur une infinité de cas differens où cet équilibre peut arriver, il n'y en a qu'un seul dans lequel le poids ou la puissance D puisse (*Corol. 11.*) être double de chacune des

des puissances P, R ; & que dans tous les autres il est toujours (*Corol.* 10.) moindre que double, & moindre à l'infini que chacune d'elles.

Tous ceux qui se mêlent de Mécanique, savent assez que jusqu'au Projet de celle-ci, donné en 1687. dans lequel ceci fut ainsi démontré, on regardoit ordinairement comme générale, & comme absolument vraie cette proposition : Qu'un poids attaché ou suspendu au centre mobile d'une Poulie, & en équilibre avec une puissance appliquée à une des extrémités d'une corde, laquelle embrassant cette Poulie, auroit son autre extrémité retenue par quelque clou, ou autrement, seroit double de cette puissance. Cependant on voit par ce dernier *Corol.* 12. & par le *Corol.* 7. que sur une infinité de cas différens où cet équilibre peut arriver, cette proposition n'est vraie que dans un seul, qui est lorsque les parties de la corde, qui touchent cette Poulie, sont parallèles entr'elles, & qu'elle est fausse dans tous les autres. Il est vrai que dans la démonstration qu'en donnent les Auteurs qui l'ont avancée, ils supposent tous que ces parties de corde touchent cette Poulie aux extrémités d'un même diamètre ; & conséquemment qu'elles sont parallèles entr'elles ; mais outre qu'il est rare qu'elles le soient, ces Auteurs n'ayant point fait cette restriction dans leur proposition, ils la regardent dans la suite comme générale, & l'appliquent indifféremment à toutes les machines où l'on se sert de Poulies, sans avoir égard à la situation de leurs cordes, que plusieurs même dirigent indifféremment, sans rien changer au rapport résultant du seul parallélisme de ces directions dans cette proposition, entre les poids & la puissance qu'ils y supposent en équilibre entr'eux, comme si cette variété des directions n'en devoit apporter aucune dans ce rapport : ce qui a jetté ces Auteurs dans des méprises considérables, comme on le verra par le *Corol.* 17. de ce Théoreme-ci, & par les *Corol.* 1. 2. 3. des *Th.* 17. 18. dans les réflexions qui suivront ce *Corol.* 17. du présent *Th.* 14. & le Scholie du *Th.* 18.

M. Wallis est le seul que je sçache avoir reconnu cet inconvénient avant 1687. que j'en avertis dans le Projet de

cette Mécanique-ci, sans sçavoir, ou sans me souvenir alors qu'il l'eût effectivement reconnu. Je l'apperçois tout présentement dans les Scholies des propositions 2. 3. du chap. 8. de la part. 3. de sa Mécanique ; mais il n'y remédie pas : il se contente de dire dans le premier de ces deux Scholies, que l'on y pourra remédier par ce qu'il a dit de l'obliquité des mouvemens dans le chap. 2. & puis dans l'autre Scholie il traite cet inconvenient de leger, quoiqu'il n'y ait rien de leger pour un Géometre, sur tout pour un aussi grand Géometre qu'il l'étoit, & que cet inconvenient puisse même aller jusqu'à faire prendre un poids pour double d'une puissance par rapport à laquelle il feroit si petit qu'on voudroit, & cependant toujours en équilibre avec elle, ainsi qu'on le vient de voir dans les Cor. 7. 12.

Au reste cette remarque, à laquelle nous a engagé la justice due à M. Wallis, pour avoir le premier (que je sçache) apperçu cette difficulté, ne doit faire penser autre chose de lui, par rapport à elle, sinon que la facilité qu'il croyoit à résoudre le lui a fait negliger, quoiqu'il en soit de cette facilité à résoudre cette difficulté par le principe de M. Wallis, ceux pour qui ceci est écrit, seront peut-être bien aises de la voir (comme ici) résolue par le nôtre.

C O R O L L A I R E XIII.

Il suit des part. 2. 4. de ce Théoreme-ci, que si les parties de corde PM, RN, des puissances P, R, lorsqu'elles soutiennent la puissance D, ne sont pas parallèles entr'elles, ces deux mêmes puissances P, R, pourront soutenir la même troisième D par le moyen d'une même Poulie MBNC, dans deux situations différentes de leurs cordes PM, RN, parce que ces deux cordons prolongez peuvent faire des angles égaux en H. de part & d'autre de la Poulie MBNC, ou de son centre A, entr'elles & avec la direction AD de ce centre, ou de cette Poulie, soit en s'écartant l'une de l'autre, comme dans les Fig. 102. 104. soit en s'approchant, comme dans les Fig. 103. 105. par conséquent (part. 2. 4.) les mêmes puis-

fances P , R , qui dans l'une de ces deux situations de leurs parties de corde, sont capables de soutenir la puissance ou le poids D , le pourront encore soutenir dans l'autre.

La même chose suit aussi des *part.* 3. 5. parce qu'en ce cas des directions PM , RN , non parallèles entr'elles, des puissances P , R , ces directions peuvent en deux situations différentes toucher la même Poulie $MBNC$ aux extrêmités de deux soutendantes MN égales entr'elles, l'une au dessus du centre A , comme dans les *Fig.* 102. 105. & l'autre au dessous, comme dans les *Fig.* 103. 104. les deux puissances P , R , qui soutiendroient la troisième D dans une de ces deux situations de leurs cordons PM , RN , la soutiendroient aussi (*part.* 3. 5.) dans l'autre.

C O R O L L A I R E X I V.

Mais si les directions ou cordons PM , RN , des puissances P , R , en équilibre (*Hyp.*) avec la puissance D , sont parallèles entr'elles; ces deux puissances P , R , ne pourront (*part.* 2. 3.) soutenir la troisième D qu'en cette seule situation de leurs cordons ou parties de corde; parce qu'il n'est pas possible (*Corol.* 7.) de donner à ces cordons d'autre situation, dans laquelle la puissance ou le poids D soit double de chacune des puissances P , R , comme il l'est (*Corol.* 2.) dans celle-ci.

C O R O L L A I R E X V.

Fig. 106.

Il suit encore de la *part.* 2. de ce Théoreme-ci que le poids D en équilibre avec la puissance R par le moyen de plusieurs Poulies mobiles, dont A , B , C , &c. sont les centres separez & appliquez comme on les voit dans la *Fig.* 106. Il suit, dis-je, encore de la *part.* 2. du present *Th.* 14. que ce poids D ainsi en équilibre avec la puissance R , est toujours à cette puissance comme le produit des sinus des angles totaux MHN , PKQ , XLV , &c. que font (lorsqu'on les prolonge) les parties dont les

F f ij

cordes EK, FO, GR, &c. touchent toutes ces Poulies, est au produit des sinus des moitiéz de chacun de ces angles. Car (*part. 2.*) la résistance de la Poulie A ou du poids D, est à la résistance de la Poulie B, comme le sinus de l'angle MHN est au sinus de sa moitié; de même (*part. 2.*) la résistance de la Poulie B est à celle de la Poulie C, comme le sinus de l'angle PKQ est au sinus de sa moitié; de même encore (*part. 2.*) la résistance de la Poulie C est à celle de la puissance R, comme le sinus de l'angle XLY est au sinus de sa moitié; & toujours de même, quelque nombre de Poulies mobiles qu'on suppose ici avant que d'arriver à la puissance R. Donc, en multipliant par ordre les termes de toutes ces analogies, l'on aura ici le poids D à la puissance R, comme le produit des sinus des angles totaux MHN, PKQ, XLY, &c. ou EHK, FKC, GLR, &c. est au produit des sinus des moitiéz de ces angles.

COROLLAIRE XVI.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans le précédent Corol. 15. si l'on ajoute aux Poulies mobiles les soutendantes & les rayons qu'on leur voit ici par les points où elles sont touchées par les cordes qui les soutiennent, ainsi que dans la *part. 3.* la résistance de la Poulie A; ou du poids D, sera ici (*part. 3.*) à la résistance de la Poulie B :: MN. AM. De même (*part. 3.*) la résistance de la Poulie B sera ici à celle de la Poulie C :: PQ. BP. De même encore (*part. 3.*) la résistance de la Poulie C sera à celle de la puissance R :: XY. CX. Et toujours de même, quelque nombre de Poulies mobiles qu'on suppose ici depuis le poids D jusqu'à la puissance R. Donc, en multipliant par ordre les termes de toutes ces Analogies, l'on aura ici $D.R :: MN \times PQ \times XY. AM \times BP \times CX$. C'est-à-dire, que le poids D fera toujours ici à la puissance R, comme le produit des soutendantes des arcs des Poulies, embrassées par les cordes qui les soutiennent sera au produit de leurs rayons.

COROLLAIRE XVII.

Si presentement on suppose que les cordons qui touchent ces Poulies, sont tous deux à deux paralleles entre eux sur chacune d'elles, cette hypothese rendant (*Lem. 6. Corol. 1.*) les angles MHN, PKQ, XLY, &c. infiniment aigus, leurs sinus seront alors (*Lem. 7.*) doubles de ceux de leurs moitez; ou (ce qui revient au même) les soutendantes MN, PQ, XY, &c. des arcs enveloppez par les cordes qui les soutiennent, passant alors toutes par les centres A, B, C, &c. de ces arcs ou des Poulies, seront aussi pour lors chacune double du rayon de chaque Poulie, dont cette soutendante est alors le diamètre. Ainsi ayant en general le poids D à la puissance R. (*Corollaire 15.*) comme le produit des sinus des angles totaux MHN, PKQ, XLY, &c. au produit des sinus des moitez de chacun de ces angles, ou (*Corollaire 16.*) comme le produit des soutendantes MN, PQ, XY, &c. au produit des rayons des Poulies: l'on aura ici $D.R.::1 \times 1 \times 1 \times \&c. \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \&c.::2 \times 2 \times 2 \times \&c.$ 1. c'est-à-dire, le poids D à la puissance R, comme le degré de 2, qui auroit pour exposant le nombre des Poulies, seroit à l'unité: de sorte qu'en prenant n pour ce nombre quelconque des Poulies, ce cas de parallelisme supposé dans toutes entre les cordons touchans de chacune donneroit en general $D.R.::2^n 1.$ Ce qui signifie qu'alors le poids D seroit à la puissance R, comme le plus grand terme d'une progression Géométrique double, qui en auroit autant qu'il y a de Poulies, plus un; seroit au premier. D'où l'on voit que $n=3$ dans le cas de la presente Fig. 106. de trois Poulies, donneroit $D.R.::2^3.1::8.$ 1. s'il y en avoit quatre, alors $n=4$ donneroit $D.R.::2^4.1::16.$ 1. s'il y en avoit cinq, alors $n=5$ donneroit $D.R.::2^5.1::32.$ 1. & ainsi de tel autre nombre n qu'on voudra de Poulies.

COROLLAIRE XVIII.

Ce cas (*Corol. 17.*) de parallelisme deux à deux de tous les cordons touchans des Poulies employées, comme dans la presente Fig. 106. est le seul sur une infinité, dans lequel le poids D en équilibre avec une puissance R, puisse être à cette puissance, comme le plus grand terme d'une progression Géométrique double, qui en auroit autant qu'il y a de Poulies, plus un, seroit au premier. Car dans tous les autres cas de cordons touchant les Poulies sans être paralleles deux à deux sur chacune, ce poids D doit toujours être à cette puissance R en équilibre (*Hyp.*) avec lui, en moindre raison (*Corol. 3.*) que ce dernier terme au premier de cette progression double, & même (*Corol. 4.*) en moindre à l'infini; parce que les angles MHN, PKQ, XLY, &c. ne pouvant devenir plus aigus (*Lem. 6. Corol. 1.*) que lorsque ces parties de cordes, tangentes des Poulies, sont deux à deux (sur chaque Poulie) paralleles entr'elles, les raisons de leurs sinus aux sinus de leurs moitez, ne peuvent jamais être plus grandes (*Corol. 7.*) que celle de 2 à 1. Pareillement les soutendantes MN, PQ, XY, &c. alors diamètres de leurs Poulies, ne pouvant jamais être plus grandes qu'en cet état; le rapport de chacune au rayon de sa Poulie, ne peut être non plus jamais plus grand que de 2 à 1. Au contraire les angles MHN, PKQ, XLY, &c. pouvant devenir toujours plus grands ou plus obtus à l'infini, les rapports de leurs sinus aux sinus de leurs moitez, peuvent (*Lem. 8. Corol. 6.*) diminuer à l'infini; ou (ce qui revient au même) les soutendantes MN, QP, YX, &c. devant diminuer à mesure que ces angles augmentent ou deviennent plus obtus; le rapport de chacune d'elles au rayon de sa Poulie, peut aussi par ce moyen diminuer à l'infini.

De-là on voit assez la méprise de ceux qui dans cet usage des Poulies, ont avancé comme proposition generale, que le poids D est la puissance R, comme le plus grand terme

d'une progression double, qui en auroit autant qu'il y a de Poulies, plus un, est au moindre. *Ce qui les a trompez, c'est l'usage trop étendu qu'ils ont donné à la proposition rapportée dans la réflexion qui suit le Corol. 12. de ce Théorème-ci.*

COROLLAIRE XIX.

Le précédent Corol. 17. fait déjà voir, & on le verra encore dans la suite, que les Poulies mobiles peuvent considérablement épargner les forces qu'il faudroit employer pour soutenir immédiatement, & sans aucune machine le poids qu'on soutient avec elles; puis-que suivant ce Corol. 17. dans le cas du parallélisme des cordons touchans de chacune des trois Poulies de la Fig. 106. il ne faut pour soutenir le poids D par leur moyen, qu'une force égale à la huitième partie de sa pesanteur, au lieu qu'il la faudroit (Ax. 4.) égale à cette pesanteur entière pour soutenir ce poids immédiatement & sans le secours d'aucune machine. Si on le vouloit soutenir de même avec quatre Poulies ainsi mobiles, ce Corol. 17. fait pareillement voir que dans ce cas de parallélisme des cordons touchans chacune de toutes ces Poulies, il ne faudroit qu'une puissance égale à la seizième partie de la pesanteur de ce poids; qu'avec cinq Poulies il ne faudroit qu'une puissance égale à la trente-deuxième partie de sa pesanteur; & toujours moindre à l'infini, que ce poids suivant la progression-marquée dans ce Corol. 17. à mesure qu'on augmentera le nombre des Poulies: de sorte que si m étoit un terme d'une telle progression-double $\div 1. 2. 4. 8. 16. \dots, m. \&c.$ lequel fût précédé d'autant d'autres qu'il y auroit ici de Poulies toutes touchées par des cordons paralleles entr'eux deux à deux pour chacune; le poids D seroit alors à la puissance $R::m. 1.$

Ce cas de parallélisme des cordons touchans de chaque Poulie mobile, est bien celui où la puissance est (Corol. 6.) la plus petite de celles qui, à l'aide de ces Poulies,

Fig. 107.
108.

peuvent faire équilibre avec ce poids ; mais il n'est pas le seul où ce poids puisse ainsi être soutenu par une puissance moindre que lui. On le verra, si l'on imagine la puissance R en équilibre avec le poids D suspendu au centre A , ou plutôt à la chape AB d'une Poulie mobile $MBNC$ soutenue sur une corde $PMBNR$, dont une extrémité soit attachée à un clou ou crochet P , & l'autre retenue par la puissance R : on verra, dis-je, suivant les part. 2. 3. du présent Th. 14. & suivant le Corol. 6. du Lem 8. que depuis la situation où les cordons PM , NR , prolongez font entr'eux un angle PHR de 120 degrez, jusqu'à ce qu'ils soient devenus parallèles entr'eux, la puissance R sera toujours moindre que le poids D en équilibre (*Hyp.*) avec elle, & d'autant moindre (quoiqu'en raison différente) que cet angle se trouvera plus aigu. Car le sinus de 120 degrez étant le même (*Déf. 9. Corol. 2.*) que celui de sa moitié 60 degrez, qui en est le complément à 180 degrez, ou (ce qui revient au même) la soutendante MN étant alors égale au rayon AM ou AN de la Poulie $MBNC$; les part. 2. 3. font voir que lorsque l'angle PHR fera de 120 degrez, la puissance R sera précisément égale au poids D : & parce que plus cet angle diminuera, plus au contraire (*Lem. 8. Corol. 6.*) augmentera le rapport de son sinus à celui de sa moitié, aussi-bien que le rapport de la soutendante MN au rayon AM ou AN de la Poulie ; & conséquemment plus diminuera pour lors le rapport du sinus de la moitié de cet angle PHR au sien, ou du rayon AM de la Poulie à la soutendante MN , plus aussi (*part. 2. 3.*) diminuera pour lors la puissance R par rapport au poids D toujours le même & toujours (*Hyp.*) en équilibre avec elle, jusqu'à ce qu'enfin elle n'en soit plus que la moitié (*Corol. 2.*) lorsque les cordons PM , RN , seront devenus parallèles entr'eux : ce que le rapport, sur tout du rayon AM ou AN de la Poulie à la soutendante MN de son arc MBN , enveloppé de la corde $PMBNR$, fait voir sensiblement.

La même chose seroit encore sensiblement en imaginant un parallelogramme HEGF, dont la diagonale HG soit une partie quelconque de la direction DA du poids D prolongée depuis H vers G, & dont les côtez HE, HF, soient sur les directions PH, HR. Car alors on verra que puisque le poids D doit toujours être ici (*part. 2.*) à la puissance R, comme le sinus de l'angle PHR, ou EHF, au sinus de sa moitié EHG ou HGF, tant qu'il sera en équilibre avec elle; & conséquemment aussi pour lors (*Déf. 9. Corol. 2.*) comme le sinus de son complément HPG est au sinus de HGF, c'est-à-dire (*Lem. 8. Corol. 2.*) comme HG est à HF: on verra, dis-je, alors que le cas de l'angle PHR ou EHF de 120 degrez rendant le triangle HFG équilatéral, & conséquemment alors $HF=HG$; la puissance R en ce cas doit être égale au poids D. On verra de plus que le rapport de HF à HG diminuant toujours (*Lem. 8. Corol. 2. & 6.*) à mesure que l'angle PHR devient plus aigu, jusqu'à devenir (*Lem. 7. & 8. Corol. 2.*) $HF+FG=HR$, & conséquemment $HF=\frac{1}{2}HG$ lorsque l'angle PHR se trouve infiniment aigu, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 1.*) lorsque les directions PM, RN, sont paralleles entr'elles; la puissance R toujours en équilibre (*Hyp.*) avec le poids D, doit toujours diminuer avec cet angle PHR, depuis l'égalité qu'on lui vient de voir avoir avec ce poids, lorsque cet angle étoit de 120 degrez, jusqu'à n'en valoir plus que la moitié (*Corol. 2.*) lorsque cet angle est devenu infiniment aigu par l'arrivée (*Lem. 6. Corol. 1.*) des cordons PM, RN, à être paralleles entr'eux.

Voilà quelle est l'utilité des Poulies mobiles pour l'épargne des forces dans la Statique: utilité d'autant plus grande que plus on y emploiera de ces sortes de Poulies à la fois, moins (*Corol. 17.*) il faudra de force pour soutenir, & conséquemment aussi pour mouvoir les poids qu'il s'agira de retenir ou de transporter d'un lieu en un autre, on le verra encore davantage dans la suite.

Quant aux Poulies des centres fixes, il suit du Corol. I. qu'avec elles seules, de quelque manière qu'on s'en serve, il n'y aura jamais rien à gagner du côté de la force qu'il y faut employer, c'est-à-dire, que de quelque manière qu'on s'en serve, il y faudra toujours employer autant de force pour soutenir un poids par leur seul moyen, qu'il en faudroit pour le soutenir immédiatement sans elles, & sans aucune autre machine. Par exemple, il faudra une même force R , quelque direction qu'on lui donne, pour soutenir le poids D avec la corde RAD par le moyen de la Poulie fixe A , que pour le soutenir immédiatement avec le seul cordon AD , c'est-à-dire, la même qu'une puissance en A , qui soutiendrait effectivement ce poids avec le seul cordon AD ; puisqu'en ce cas d'équilibre de part & d'autre, l'on auroit (Corol. I.) $R=D$, & aussi (Ax. 4.) la puissance en $A=D$.

Fig. 110.

De même quand on emploieroit à la fois plusieurs de ces Poulies fixes AB, EF, HK , &c. placées à volonté, on ne gagneroit encore rien du côté de la force R , qu'il faudroit employer pour soutenir le poids D par le moyen de ces seules Poulies avec la corde $DABEFHKKR$, appuyée sur ou contr'elles; c'est-à-dire, que cette force R , quelque direction qu'elle eût, devroit encore être ici égale au poids D pour l'y soutenir ainsi en équilibre, de même (Ax. 4.) que pour le soutenir immédiatement sans le secours d'aucune machine. Car en ce cas d'équilibre les deux forces dont chacune des parties BE, FH , &c. de la corde, est tirée directement en sens contraires, étant (Ax. 4.) égales entr'elles, si l'on appelle M chacune des deux forces dont BE est tirée de B vers E , & de E vers B ; N , chacune des deux dont FH est pareillement tirée de F vers H , & de H vers F : ce cas d'équilibre donnera (Corol. I.) $R=N=M=D$, c'est-à-dire, la puissance R égale au poids D , de même (Ax. 4.) que si elle le soute-

noit immédiatement & sans le secours d'aucune machine.

Donc les Poulies fixes ou de centres fixes, de quelque maniere & en quelque nombre qu'on les employe, n'épargnent jamais aucune force. Elles ne laissent pourtant pas d'être très-utiles, non seulement en ce qu'elles servent (comme dans la Fig. 110.) à continuer par tels détours qu'on voudra, des mouvemens ou des efforts que des embarras empêchent de pouvoir être faits en ligne droite, en plaçant ces Poulies (appelées alors *Poulies de renvoi*) à tous les angles de ces détours, une à chaque angle; mais encore en ce qu'elles nous mettent en état d'employer beaucoup plus de force, que nous ne pourrions faire sans elles, contre le fardeau à soutenir ou à enlever: elles nous mettent, dis-je, en état de tirer de haut en bas par dessus elles, & par-là de nous secourir de toute la pesanteur de notre corps, que nous aurions même à soutenir avec le fardeau, en le tirant ou soulevant directement de bas en haut. La Poulie A de la Fig. 109. fait, dis-je, qu'une main appliquée en R. contre le poids D, y est secourue de tout le poids du corps de celui qui, ainsi placé, tire contre ce poids D; au lieu qu'en A cette main n'auroit que sa seule force pour agir contre ce poids sans le secours de cette Poulie, ni d'aucune autre machine. Ce secours du poids de notre corps, est ce qui nous fait toujours tirer plus aisément & plus fortement de haut en bas que de bas en haut: c'est ce qui fait qu'un sceau d'eau, par exemple, est beaucoup plus aisé à tirer avec le secours d'une Poulie fixe, que directement & sans elle.

On voit de-là, & du Corol. 19. que l'utilité des Poulies consiste en ce que les mobiles (Corol. 19.) nous épargnent des forces, & que les fixes (Corol. 20.) nous en facilitent l'usage. Voici présentement la maniere de profiter de ces deux avantages en même tems, se servant de ces deux especes de Poulies à la fois.

COROLLAIRE XXI.

Fig. 111.

112. 113.

114. 115.

Supposons presentement le poids D en équilibre avec la puissance R sur deux Poulies à la fois, dont une EGFK soit fixe, & l'autre MBNC mobile avec le poids D suspendu à son centre A, ou à sa chape AB : soit, dis-je, ce poids D soutenu par la puissance R, appliquée à une des extrémités d'une corde RFKEMBN, qui après avoir passé par dessus la Poulie fixe EKFG, & par dessous la mobile MBNC, ait son autre extrémité attachée au bout G de la chape LG de la premiere EKFG de ces deux Poulies, fixe en son centre L dans les Fig. 111. 112. ou par de-là sa circonference au point S de sa chape GL prolongée dans les Fig. 113. 114. 115. n'ayant de mobilité qu'autour de ces points L, S.

L'équilibre supposé entre le poids D & la puissance R sur ces deux Poulies à la fois, rendant égales (Ax. 4.) les forces dont le cordon EM est tiré directement en sens contraires de E vers M, & de M vers E ; si l'on appelle P chacune de ces deux forces ; H, le sinus de l'angle MHN compris entre les deux cordons EM, GN, prolongez, lesquels touchent la Poulie MBNC ; & h , le sinus de la moitié de cet angle : l'on aura (Corol. 1.) $R = P$, & non seulement (part. 2.) $P. D :: h. H$. mais encore (part. 3.) $P. D :: AM. MN$. Donc aussi pour lors $R. D :: h. H$. Et $R. D :: AM. MN$. ainsi qu'il arriveroit (part. 2. 3.) si la puissance R étoit P. D'où l'on voit que cette puissance R peut avoir ici tout à la fois les deux avantages marquez dans les Corol. 18. 19. sçavoir (à cause de la Poulie mobile MBNC) de pouvoir être non seulement moindre (Corol. 2.) que le poids D en équilibre (Hyp.) avec-elle, mais encore d'autant moindre (Corol. 19.) que l'angle MHN ou EHG sera plus petit que de 120. degrez, quoiqu'en raison differente ; & de plus (à cause de la Poulie fixe EKFG) de coûter d'autant moins à fournir (Cor. 20.) que la pesanteur du corps de celui qui tire en R, y peut beaucoup contribuer, outre qu'il peut encore se soula-

ger par tout ce qu'il pourra ajouter d'autres poids en R.

S C H O L I E.

I. Il est visible que les chapes LG doivent se diriger dans le précédent Corol. 20. de la maniere qu'on les voit dirigées dans les Fig. 111. 112. 113. 114. 115. Car, 1°. dans les Fig. 111. 112. dans lesquelles la Poulie EKFG est fixe en son centre L, autour duquel seulement elle est mobile indépendamment de sa chape LG, qui l'est seulement aussi autour de ce point fixe L; cette chape en ce cas ne recevant d'impression que suivant la direction GN du cordon attaché à son extrémité G, il est manifeste qu'elle doit toujours se diriger suivant cette ligne GN; en sorte que NGL ne soit plus qu'une ligne droite, qui prolongée, aussi-bien que ME, concoure avec elle en H au dessus ou au dessous de la Poulie mobile MBNC, selon que son diamètre sera plus grand ou plus petit que le rayon de la Poulie fixe EKFG: si ce diamètre & ce rayon étoient égaux, il est visible que NL, ME, seroient parallèles entr'elles, & (Lem. 3. Corol. 15. & Lem. 6. Cor. 1.) à la direction DH du poids D.

FIG. 111.
112.

2°. Dans les Fig. 113. 114. 115. dans lesquelles la Poulie EKFG est mobile non seulement autour de son centre L fixe dans la chape SG, mais encore avec son centre & cette chape autour du point S de cette même chape, fixe au-delà de la circonférence de cette Poulie EKFG: si outre les cordons GN, EM, prolongez vers H jusqu'à leur rencontre (part. 1.) en ce point de la direction DH du poids D, on prolonge de même RF, ME, vers Q, jusqu'à leur rencontre en ce point, & qu'on mène la droite QO par le centre L de la même Poulie EKFG; on verra que du concours d'action des forces (Corol. 1.) égales dont les cordons EM, FR, sont tirez par le poids D, & par la puissance R, il en doit résulter (Lem. 3. part. 4. & Corol. 1.) suivant la droite QLO, sur la Poulie EKFG, & sur sa chape SG, une impression qui les pousse ou qui les tire suivant LO: de sorte que cette

FIG. 113.
114. 115.

chape SG, tirée de plus suivant GN par le poids D, se trouve ici poussée ou tirée tout à la fois suivant deux directions différentes LO, NG, qui lui doivent visiblement faire prendre la position qu'on lui voit dans les Fig. 113. 114. 115. de manière que cette chape SG ne sera en ligne droite avec GN, de même que LG l'est (*nombr. 1.*) dans les Fig. 111. 112. que lorsque les directions LO, NG, seront suivant une même ligne droite, comme dans la Fig. 115.

II. La force de l'impression suivant LO, résultante du concours de la force R suivant FR, & de ce que le poids D en exerce suivant EM, étant à cette force R (*part. 2.*) comme le sinus de l'angle RQM est au sinus de sa moitié, ou (*part. 3.*) comme la soutendante EF de l'arc EKFG de la Poulie EKFG, embrassé par la corde RFKEMBNG, est au rayon LF de cette Poulie; & la force suivant GN étant (*Corol. 1.*) $=P=R$: l'on aura ici la force de l'impression suivant LO, à la force suivant GN, comme le sinus de l'angle RQM est au sinus de sa moitié, ou comme la soutendante EF est au rayon LF de la Poulie EKFG. Ce qui étant connu, la Sect. 6. ou la Définit. qui s'y trouvera, fera voir que la chape SG est ici un Levier appuyé en S, marquera dans le Corol. 2. de son Th. 21. la situation exacte que cette chape doit prendre ici dans les Fig. 113. 114. savoir, que cette situation qu'on y voit, doit être telle que les perpendiculaires menées du point d'appui S sur ces directions GN, LO, prolongées, soient entr'elles comme les sinus de l'angle RQM, & de sa moitié sont entr'eux, ou comme la soutendante EF est au rayon LF de la Poulie EKFG.

R E M A R Q U E.

Fig. 102.
& suivantes
jusqu'à 115.

Quoique la part. 3. du présent Th. 14. ne fasse aucune mention des sinus, & que par son moyen dans la Théorie on puisse y avoir le rapport du poids D à chacune des puissances P, R, sans y employer de sinus: cependant comme l'on en a besoin pour connoître la sou-

tendant MN, que cette part. 3. y employe, il faudroit toujours revenir aux sinus dans la Pratique & dans l'usage de cette part. 3. Le plus court chemin est de s'en tenir tout d'un coup aux sinus de la part. 2. puisqu'il faudroit plus d'Analogies & de calcul pour passer des sinus à la connoissance de la soutendante MN, & ensuite de cette connoissance à celle du rapport cherché, que d'aller tout d'un coup des sinus à ce rapport, comme dans la part. 2. D'où l'on voit que dans la Pratique l'usage de cette part. 2. est toujours préférable à celui de la part. 3. quoiqu'à la premiere vûe celle-ci paroisse plus simple que celle-là. La raison de cette préférence sera la même pour la suite dans l'usage qu'on va faire de plusieurs Poulies mobiles à la fois.

T H E O R E M E X V.

Soient deux puissances quelconques P, R , appliquées suivant telles directions MP, NR , qu'on voudra, aux centres mobiles M, N , de deux Poulies séparées, & soutenues par le moyen d'une corde $ACDLGKB$, qui retenue à ses extrémités par deux clous ou crochets A, B , s'appuie sur une Poulie fixe H en passant de part & d'autre par dessous les mobiles M, N , dans les Fig. 116. 117. ou embrassant seulement à contre-sens ces deux Poulies mobiles M, N , sans s'appuyer sur aucune fixe, comme dans la Fig. 118.

FIG. 116.
117. 118.

I. En cas d'équilibre entre les deux puissances P, R , appliquées aux centres M, N , de ces deux Poulies mobiles, & ainsi en action l'une contre l'autre suivant leurs directions quelconques MP, NR ; ces deux puissances P, R , seront entr'elles en raison composée de la directe des sinus des angles AEL, LFB , compris entre les cordons prolongez qui touchent les Poulies mobiles, & de la reciproque des sinus des moitiés de ces angles; c'est-à-dire (en appellant E, F , les sinus des angles AEL, LFB ; & e, f , les sinus de leurs moitiés) $P.R.::E \times f.F \times e$.

II. En ce cas d'équilibre, si l'on mène les soutendantes CD, GK , avec les rayons MC, MD, NG, NK , des Poulies mo-

biles M, N , par les points C, D, G, K , où elles sont touchées par les parties AC, DL, LG, KB , de la corde $ACDLGKB$; la puissance P , sera aussi à la puissance R , en raison composée de la directe des soutendantes CD, GK , & de la reciproque des rayons MC, NG , de ces Poulies; c'est-à-dire, $P.R :: CD \times NG. GK \times MC$.

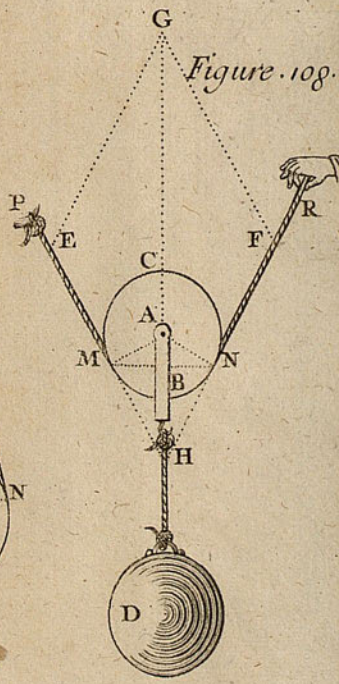
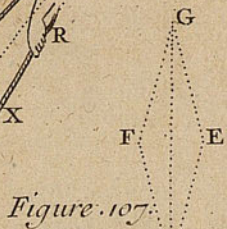
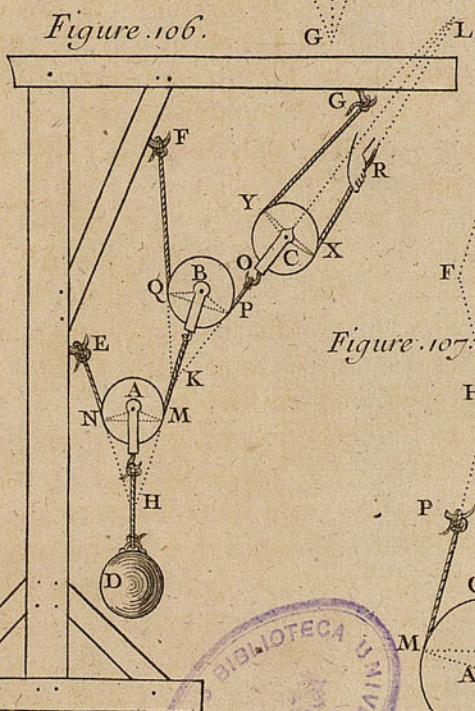
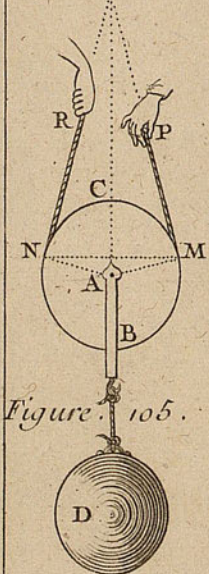
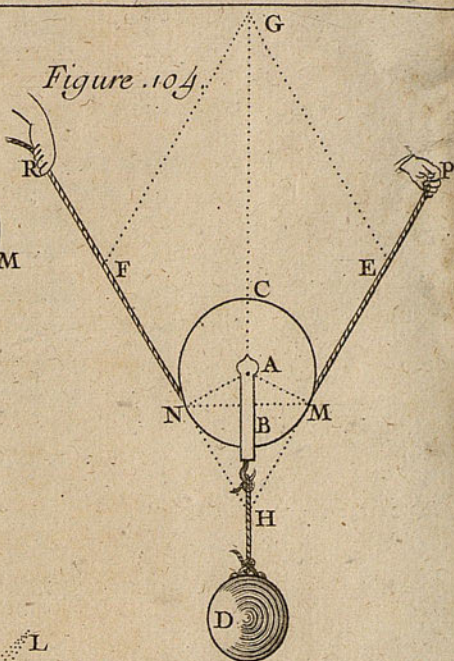
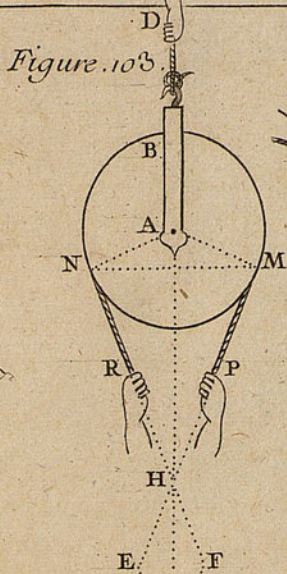
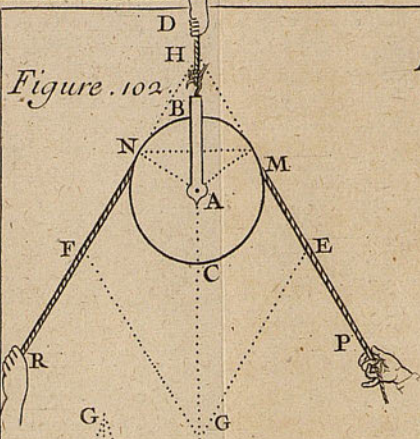
III. Reciproquement si ces deux puissances P, R , sont entr'elles en celui qu'on voudra, de ces deux rapports marquez dans les part. 1. 2. elles seront ici en équilibre entr'elles.

D E M O N S T R A T I O N.

PART. I. Outre les noms assignez dans l'énoncé de cette part. 1. soit aussi appelée L chacune des résistances suivant EL, FL , de la corde $ACDLGKB$ contre les puissances P, R , lesquelles résistances en équilibre (*Hyp.*) avec les forces directement contraires suivant LE, LF , sont (*Ax. 4. & Th. 14. Corol. 1.*) égales entr'elles. Cela posé, la part. 2. du Th. 14. donnera ici $P.L :: E.e$. Et $L.R :: f.F$. Donc (en multipliant par ordre) l'équilibre ici supposé y donnera toujours $P.R :: Exf.Fxe$. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

PART. II. En ce cas d'équilibre, si l'on appelle encore L chacune des résistances de la corde $ACDLGKB$ suivant EL, FL , la part. 3. du Th. 14. donnera $P.L :: CD.MC$. Et $L.R :: NG.GK$. Donc (en multipliant par ordre) on aura aussi pour lors $P.R :: CD \times NG. GK \times MC$. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

PART. III. Reciproquement par rapport aux part. 1. 2. à la fois, si $P.R :: Exf.Fxe$, ou $P.R :: CD \times NG. GK \times MC$. il y aura équilibre entre les puissances P, R . Car si quelque-une des deux, par exemple P , étoit trop grande ou trop petite pour faire ainsi équilibre avec l'autre R , soit une autre puissance quelconque S , qui appliquée à la place de P suivant sa direction MP , fasse effectivement équilibre avec R . Alors on auroit aussi (*part. 1.*) $S.R :: Exf.Fxe$. Et (*part. 2.*) $S.R :: CD \times NG. GK \times MC$. Par conséquent cette nouvelle puissance S seroit égale à P .
 Donc



Donc (Ax. 2.) celle-ci P feroit pareillement équilibre avec R. *Ce qu'il falloit 3°. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Il suit de la part. 1. que si plusieurs puissances P, R, S, T, V, &c. appliquées à plusieurs Poulies mobiles L, M, N, O, Q, &c. séparées comme dans les Fig. 119. 120. sont en équilibre entr'elles; ces puissances seront toutes, chacune à chacune, dans quelque ordre qu'on les prenne, en raison composée de la directe des sinus des angles compris entre les tangentes de leurs Poulies, & de la réciproque des sinus des moitez de ces angles.

Car si les sinus des angles eEe , fFf , gGg , hHh , kKk , &c. compris entre les cordons touchans des Poulies L, M, N, O, Q, &c. sont appelez E, F, G, H, K, &c. Et les sinus des moitez de ces angles, appelez e , f , g , h , k , &c. la part. 1. en ce cas d'équilibre,

$$\text{Donnera } \left\{ \begin{array}{l} P.R :: E \times f. F \times e. \\ R.S :: F \times g. G \times f. \\ S.T :: G \times h. H \times g. \\ T.V :: H \times k. K \times h. \\ \text{\&c.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P.R :: E \times f. F \times e. \\ P.S :: E \times g. G \times e. \\ P.T :: E \times h. H \times e. \\ P.V :: E \times k. K \times e. \\ R.S :: F \times g. G \times f. \\ R.T :: F \times h. H \times f. \\ R.V :: F \times k. K \times f. \\ S.T :: G \times h. H \times g. \\ S.V :: G \times k. K \times g. \\ T.V :: H \times k. K \times h. \end{array} \right.$$

Donc (en multipl. par ordre)

&c.

Ce qu'il falloit démontrer.

Hh

FIG. 119.
120.

COROLLAIRE II.

Les puissances P, R, S, T, V, &c. demeurant encore en équilibre entr'elles (dans les Fig. 119. 120. du Corol. 1. si l'on y ajoûte les soutendantes & les rayons qu'on y voit par les points d'attouchement des Poulies mobiles; la part. 2. fera voir aussi que ces puissances seront toutes, chacune à chacune, dans quelque ordre qu'on les prenne en raison composée de la directe des soutendantes des arcs de leurs Poulies embrassez par la corde qui les soutient toutes, & de la reciproque des rayons de ces Poulies. Cette seconde partie, dis-je,

$$\text{Donnera } \left\{ \begin{array}{l} P.R :: ee \times Mf. ff \times Le. \\ R.S :: ff \times Ng. gg \times Mf. \\ S.T :: gg \times Oh. hh \times Ng. \\ T.V :: hh \times Qk. kk \times Oh. \end{array} \right.$$

&c.

$$\text{Donc (en multipl. par ordre)} \left\{ \begin{array}{l} P.R :: ee \times Mf. ff \times Le. \\ P.S :: ee \times Ng. gg \times Le. \\ P.T :: ee \times Oh. hh \times Le. \\ P.V :: ee \times Qk. kk \times Le. \\ R.S :: ff \times Ng. gg \times Mf. \\ R.T :: ff \times Oh. hh \times Mf. \\ R.V :: ff \times Qk. kk \times Mf. \\ S.T :: gg \times Oh. hh \times Ng. \\ S.V :: gg \times Qk. kk \times Ng. \\ T.V :: hh \times Qk. kk \times Oh. \end{array} \right.$$

&c.

Ce qu'il falloit ici démontrer.

COROLLAIRE III.

Il suit reciproquement de la part. 3. que si les puissances P, R, S, T, V , &c. appliquées comme dans les Corol. 1. 2. sont entr'elles dans celle qu'on voudra des raisons trouvées dans ces Corol. 1. 2. c'est-à-dire (*Corol. 1.*) chacune à chacune en raison composée de la directe des sinus des angles compris entre les cordons touchans de leurs Poulies séparément mobiles, & de l'inverse des sinus des moitiés de ces angles ; ou (*Corol. 2.*) en raison composée de la directe des soutendantes des arcs enveloppez de leurs Poulies, & de la reciproque des rayons de ces Poulies ; ces puissances seront toutes en équilibre entr'elles. Car suivant la part. 3. l'on aura pour lors la puissance P en équilibre avec la puissance R , celle-ci avec la puissance S ; cette puissance S avec la puissance T , la puissance T avec la puissance V , &c. Donc toutes ces puissances seront aussi pour lors en équilibre entr'elles.

COROLLAIRE IV.

Si presentement on suppose dans le present Th. 15. & dans les Corol. 1. 2. qui le suivent, que tous les angles compris entre les cordons touchans de chaque Poulie séparément mobile, sont infiniment aigus, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 1.*) que tous ces cordons sont paralleles entr'eux deux à deux sur chaque Poulie mobile sans en excepter aucune ; alors les puissances P, R , supposées en équilibre entr'elles dans les part. 1. 2. Fig. 116. 117. 118. & les puissances P, R, S, T, V , &c. supposées de même toutes en équilibre entr'elles dans les Corol. 1. 2. Fig. 119. 120. seront toutes égales entr'elles, tant dans les part. 1. 2. que dans les Corol. 1. 2. Car les angles compris chacun entre deux de ces cordons prolongez, se trouvant alors tous égaux entr'eux, & conséquemment aussi leurs moitiés toutes égales entr'elles ; tous les produits faits chacun de chacun des sinus de chacun de ces angles totaux par le sinus de la moitié de son voisin,

FIG. 116.
117. 118.
119. 120.

marquez dans la part. 1. & dans le Corol. 1. seront alors égaux entr'eux. De même aussi les soutendantes par les points d'attouchement des Poulies mobiles, en devenant alors les diamètres; les produits marquez dans la part. 2. & dans le Corol. 2. seront pour lors tous égaux entre-eux. Donc (*part. 1. 2. & Corol. 1. 2.*) les deux puissances P, R, des part. 1. 2. Fig. 116. 117. 118. & toutes celles P, R, S, T, V, &c. des Corol. 1. 2. Fig. 119. 120. supposées en équilibre entr'elles sur des Poulies mobiles touchées de cordons paralleles entr'eux deux à deux sur chacune, seront alors égales entr'elles.

COROLLAIRE V.

Il suit reciproquement de la part. 3. & du Corol. 3. que si toutes ces puissances sont ainsi égales entr'elles, & appliquées à des Poulies séparément mobiles touchées toutes par des cordons paralleles entr'eux deux à deux sur chacune; toutes ces puissances seront alors en équilibre entr'elles dans chacune des Fig. 116. 117. 118. 119. 120. puisque suivant le raisonnement du précédent Corol. 4. elles auront alors entr'elles dans chacune de ces Figures les rapports exigez pour cet équilibre par la part. 3. & par le Corol. 3.

COROLLAIRE VI.

Il suit enfin des part. 1. 2. & des Corol. 1. 2. 4. que sur une infinité de cas dans lesquels deux ou plusieurs puissances peuvent faire équilibre entr'elles sur des Poulies séparément mobiles comme ci-dessus, il n'y en a que deux où ces puissances puissent être toutes égales entre-elles dans chacune des Figures du précédent Corol. 3. sçavoir (*part. 1. & Corol. 1.*) lorsque les produits faits chacun du sinus de chacun des angles compris entre les cordons touchans de chaque Poulie mobile, & du sinus de la moitié de chaque angle voisin, sont tous égaux entr'eux; ou (*part. 2. & Corol. 2.*) lorsque les produits faits chacun de chaque soutendante de chaque Poulie mobile,

& du rayon de chaque voisine, sont tous égaux entr'eux :
& (Corol. 4.) lorsque ces cordons touchans sont tous pa-
rallèles deux à deux sur chaque Poulie mobile.

C O R O L L A I R E VII.

Il suit réciproquement de la part. 3. & des Corol. 3. 5. que ces deux cas du précédent Corol. 6. sont aussi les seuls où des puissances égales puissent faire équilibre entr'elles sur des Poulies mobiles comme ci-dessus ; puisqu'ils sont les seuls (Corol. 6.) qui puissent rendre égaux les produits dans les rapports desquels ces puissances doivent être (part. 3. & Corol. 3. 5.) pour faire ainsi équilibre entr'elles.

Ces deux derniers Corollaires 6. 7. font encore voir combien on se méprendroit, si l'on prenoit ici comme generale la proposition rapportée dans la reflexion qui suit le Corol. 12. du Th. 14. & suivant laquelle (si elle étoit aussi generalement vraie qu'on l'a énoncée) des puissances égales appliquées comme ci-dessus, seroient toujours en équilibre entr'elles, & réciproquement toujours égales entr'elles dès qu'elles seroient ainsi en équilibre ; ce que les deux derniers Corol. 6. 7. font cependant voir n'être vrai que dans les deux cas qui y sont marquez, & faux dans tous les autres à l'infini.

S C H O L I E.

Pour ce qui est des résistances des clous ou crochets A, B, ou bien des puissances qu'il faudroit en leurs places pour les suppléer, l'égle tension de la corde qui passe de l'un à l'autre de ces crochets par dessous ou par dessus les Poulies supposées, fait assez voir que ces résistances en cas d'équilibre doivent être égales entr'elles. Cela seroit encore par les part. 1. 2. du Th. 14. & par les part. 1. 2. & Corol. 1. 2. du present Th. 15. Car les noms demeurant ici les mêmes que dans le Corol. 1. de ce Théoreme-ci, & appellant de plus ici A, B, les résistances des crochets de ces noms, ou des puissances, qui mises en leurs places, les suppléeroient.

Fig. 116. 117. 118. I. L'on aura ici pour les Fig. 116. 117. 118. $\left\{ \begin{array}{l} (Th. 14. part. 2.) A.P :: e.E. \\ (Th. 15. part. 1.) P.R :: Exf.Fxe. \\ (Th. 14. part. 2.) R.B :: F.f. \end{array} \right.$

Donc (en multipliant par ordre) $A.B :: ExexFxf.$
 $ExexFxf :: 1. 1.$ c'est-à-dire, $A=B$. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Autrement. L'on aura aussi pour les mêmes Fig. $\left\{ \begin{array}{l} (Th. 14. p. 3.) A.P :: MC. CD. \\ (Th. 15. p. 2.) P.R :: CD \times NG. GK \times MC. \\ (Th. 14. p. 3.) R.B :: GK. NG. \end{array} \right.$

Donc (en mult. par ordre) $A.B :: MC \times CD \times NG \times GK.$
 $MC \times CD \times GK \times NG :: 1. 1.$ c'est-à-dire encore, $A=B$.
 Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Fig. 119. 120. II. L'on aura pareillement ici pour les Fig. 119. 120. $\left\{ \begin{array}{l} (Th. 14. part. 2.) A.P :: e.E. \\ (Th. 15. Cor. 1.) P.V :: Exk.Kxe. \\ (Th. 14. part. 2.) V.B :: K.k. \end{array} \right.$

Donc (en multipliant par ordre) $A.B :: ExexKxk.$
 $ExexKxk :: 1. 1.$ c'est-à-dire, $A=B$. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Autrement. L'on aura aussi pour les mêmes Figures $\left\{ \begin{array}{l} (Th. 14. p. 3.) A.P :: Le.ee. \\ (Th. 15. Cor. 2.) P.V :: ee \times Qk. kk \times Le. \\ (Th. 14. p. 3.) V.B :: kk. Qk. \end{array} \right.$

Donc (en multipliant par ordre) $A.B :: Lexee \times Qk \times kk.$
 $Lexee \times Qk \times kk :: 1. 1.$ c'est-à-dire encore, $A=B$. Ce qu'il falloit encore 2°. démontrer.

THEOREME XVI.

Fig. 121. 122. 123. Si deux poids ou deux puissances P, R , appliquées aux deux extrémités d'une corde qui passe par dessus deux Poulies fixes B, C , en passant par dessous une des deux Poulies mobiles & inégales MLN, EGF , au centre de laquelle pende un



Fig. 109.

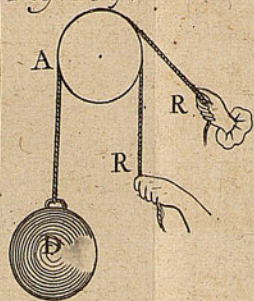


Fig. 110.

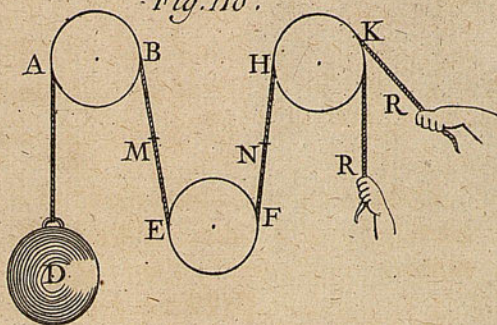


Fig. 111.

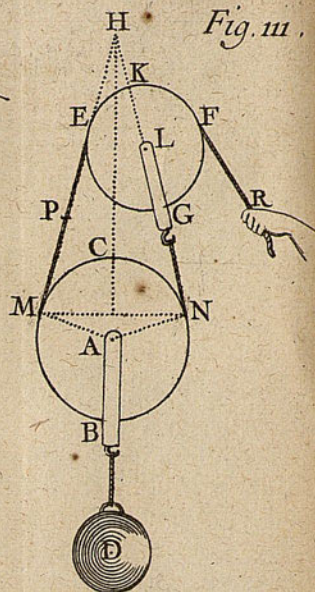


Fig. 112.

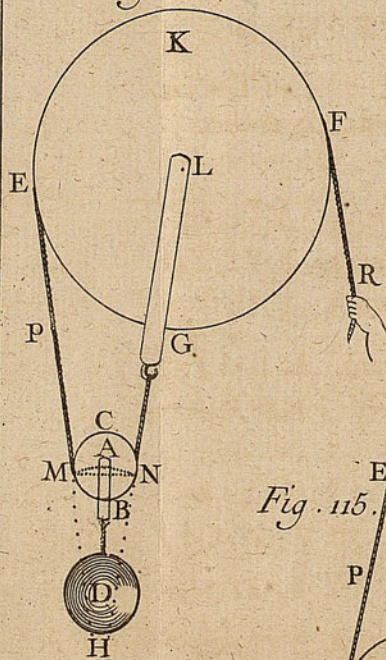


Fig. 113.

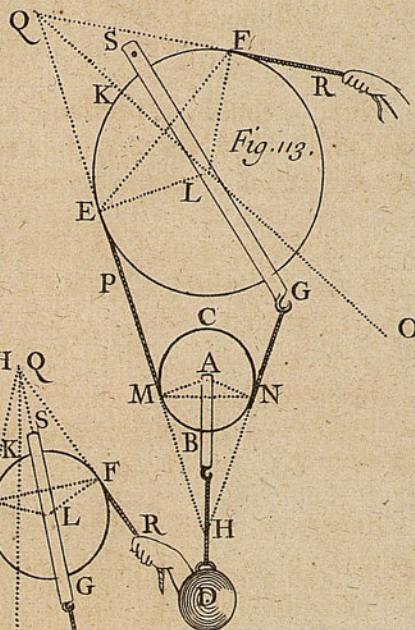


Fig. 115.

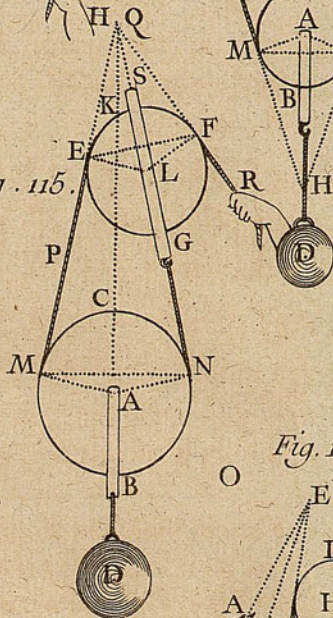


Fig. 114

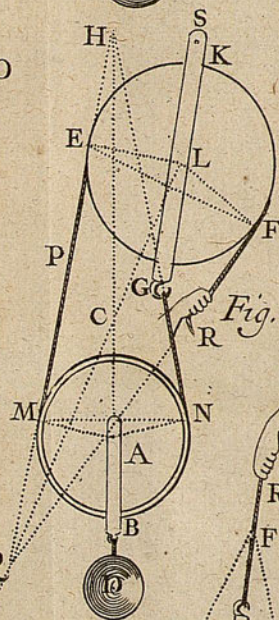


Fig. 116.

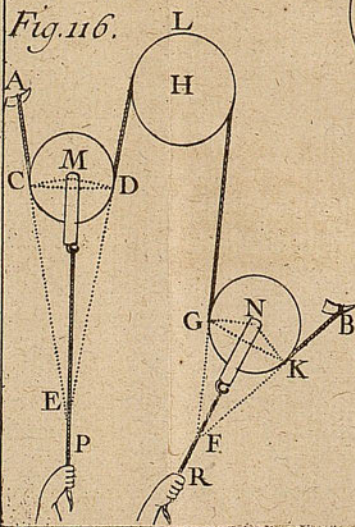


Fig. 117.

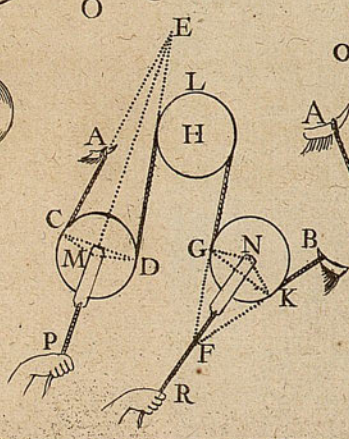
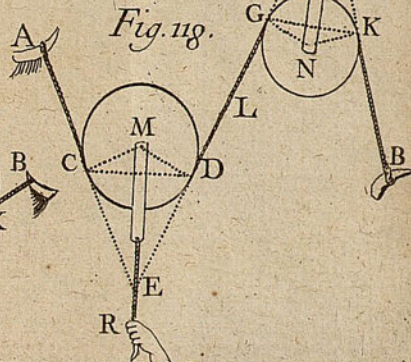


Fig. 118.





pois D que ces puissances soutiennent en équilibre avec chacune de ces deux Poulies successivement prises, & à même hauteur de leur centre. Pour cela,

I Ces deux puissances P, R , doivent être moindres en soutenant ce poids D avec la grande Poulie MLN qu'avec la petite EGF, si leurs directions BM, CN, BE, CF , concourent deux à deux en H, K , au dessous du centre commun A de ces deux Poulies mobiles, comme dans la Fig. 121.

FIG. 121.

II. Au contraire, si les points de concours H, K , des directions BM, CN, BE, CF , des puissances P & R , se trouvent tous deux au dessus du centre A, comme dans la Fig. 122, ces deux puissances doivent être plus grandes en soutenant le même poids D avec la grande Poulie MLN qu'avec la petite EGF.

FIG. 122.

III. Si enfin le point de concours H des directions BM, CN , étoit au dessus du centre A, & le point de concours K des directions BE, CF , au dessous de ce centre A, comme dans la Fig. 123, les puissances P, R , seroient moindres ou plus grandes en soutenant le même poids D avec la grande Poulie MLN qu'en le soutenant avec la petite EGF, ou égales de part & d'autre, selon que l'angle MHN seroit plus petit ou plus grand que l'angle EKF, ou égal à lui.

FIG. 123.

DEMONSTRATION.

En ce cas d'équilibre des puissances P, R , avec le poids D successivement sur chacune des Poulies mobiles LMN, EGF, à même hauteur de leur centre A, l'on aura (Th. 14. part. 2.) ce poids D à chacune des puissances P, R , comme le sinus de l'angle BHC ou MHN au sinus de sa moitié sur la grande Poulie MLN, & aussi comme le sinus de l'angle BKC ou EKF au sinus de sa moitié sur la petite Poulie EGF. Or le Corol. 1. du Lemme 8. fait voir que plus un angle est aigu, plus est grande la raison de son sinus au sinus de sa moitié. Donc,

FIG. 121.
FIG. 123.

PART. I. L'angle MHN étant plus aigu que l'angle EKF, lorsqu'ils sont tous deux au dessous du centre A, le poids D fera pour lors à chacune des puissances P, R , en plus

FIG. 121.

grande raison, lorsqu'elles le soutiendront avec la petite EGF à même hauteur de leur centre commun A. Donc aussi en ce cas des concours H, K, des directions des puissances P, R, touchantes des Poulies MLN, EGF, tous deux au dessous de leur centre commun A; ces deux puissances P, R, doivent être moindres pour soutenir le poids D avec la grande Poulie MLN, que pour le soutenir avec la petite EGF à même hauteur de leur centre commun A. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

Fig. 122.

PART. II. Au contraire l'angle MHN étant moins aigu que l'angle EKF, lorsqu'ils sont tous deux au dessus du centre A, le poids D sera pour lors à chacune des puissances P, R, en moindre raison, lorsqu'elles le soutiendront avec la grande Poulie mobile MLN, que lorsqu'elles le soutiendront avec la petite EGF à même hauteur de leur centre commun A. Donc en ce cas des points de concours H, K, des directions des puissances P, R, touchantes des Poulies mobiles MLN, EGF, tous deux au dessus de leur centre commun A; ces deux puissances P, R, doivent être plus grandes pour soutenir le poids D avec la grande Poulie MLN, que pour le soutenir avec la petite EGF à même hauteur de leur centre commun A. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

Fig. 123.

PART. III. Mais si des deux angles MHN, EKF, l'un étoit au dessus de ce centre commun A, & l'autre au dessous; sçavoir, MHN au dessus, & EKF au dessous, le contraire ne pouvant jamais arriver; le poids D seroit en plus grande, ou en plus petite, ou en même raison aux puissances P, R, lorsqu'elles le soutiendroient avec la grande Poulie MNL, & la petite EGF, selon que l'angle MHN seroit plus petit, plus grand, ou égal à l'angle EKF. Donc en ce cas de ces angles de part & d'autre du centre A, les deux puissances P, R, seront plus petites, plus grandes ou les mêmes, en soutenant le poids D avec la grande Poulie mobile MLN, qu'en le soutenant avec la petite EGF, selon que l'angle MHN sera plus grand, plus petit, ou égal à l'angle EKF. *Ce qu'il falloit 3°. démontrer.*

AUTRE

AUTRE DEMONSTRATION.

Par les points d'attouchement M, N, E, F, des Poulies mobiles MLN, EGF, soient imaginées les soutendantes MN, EF, avec les rayons AM, AN, AE, AF, menées de leur centre commun A. Il est visible que chacun des angles MAN, EAF, étant le complément à deux droits, de chacun des angles MHN, EKF, qui leur répondent, plus chacun de ces deux derniers angles MHN, EKF, sera petit, plus au contraire sera grand chacun des deux autres MAN, EAF, qui en fera toujours le complément à deux droits; & que plus chacun de ces deux-ci sera grand, plus aussi sera grande la raison de la base ou soutendante MN, ou EF, au rayon AM, ou AE, qui lui répond. Donc plus chacun des angles MHN, EKF, sera petit, plus au contraire sera grande la raison de la soutendante MN, ou EF, au rayon AM, ou AE, qui lui répond. Or le cas présent d'équilibre des puissances P, R, avec le poids D successivement sur chacune des Poulies mobiles MLN, EGF, exige (*Th. 14. part. 3.*) ce poids D à chacune de ces puissances P, R, comme la soutendante MN est au rayon AM sur la plus grande MLN de ces deux Poulies mobiles, & comme la soutendante EF est au rayon AE sur la plus petite EGF. Donc aussi en ce cas d'équilibre plus chacun des angles MHN, EKF, sera petit, plus au contraire sera grande la raison du poids D à chacune des puissances P, R. Or,

PART. I. L'angle MHN est visiblement plus petit que l'angle EKF, lorsqu'ils sont tous deux au dessous du centre A. Donc en cas des points de concours H, K, tous deux au dessous du centre A, le poids D sera toujours en plus grande raison à chacune des puissances P, R, lorsqu'elles le soutiendront avec la grande Poulie mobile MLN, que lorsqu'elles le soutiendront avec la petite EGF; & par conséquent ces deux puissances P, R, doivent être alors moindre sur la grande Poulie mobile MLN, que sur la petite EGF, pour les soutenir l'une

après l'autre avec le même poids D à même hauteur de leur centre commun A. *Ce qu'il falloit encore 1^o. démontrer.*

FIG. 122.

PART II. L'angle MHN étant plus grand que l'angle EKF, lorsqu'ils sont tous deux au dessus de ce centre A, il suit de même que les puissances P, R, doivent au contraire être alors plus grandes pour soutenir le poids D avec la grande Poulie mobile MLN, que pour le soutenir avec la petite EGF à même hauteur de leur centre commun A. *Ce qu'il falloit encore 2^o. démontrer.*

FIG. 123.

PART. III. Il suit pareillement que lorsque les angles MHN, EKF, se trouvent de part & d'autre du centre A, les deux puissances P, R, doivent être plus petites, plus grandes, ou les mêmes pour soutenir le poids D avec la grande Poulie mobile MLN, que pour le soutenir avec la petite EGF à même hauteur de leur centre commun A, selon que l'angle MHN sera plus grand, plus petit, ou égal à l'angle EKF. *Ce qu'il falloit encore 3^o. démontrer.*

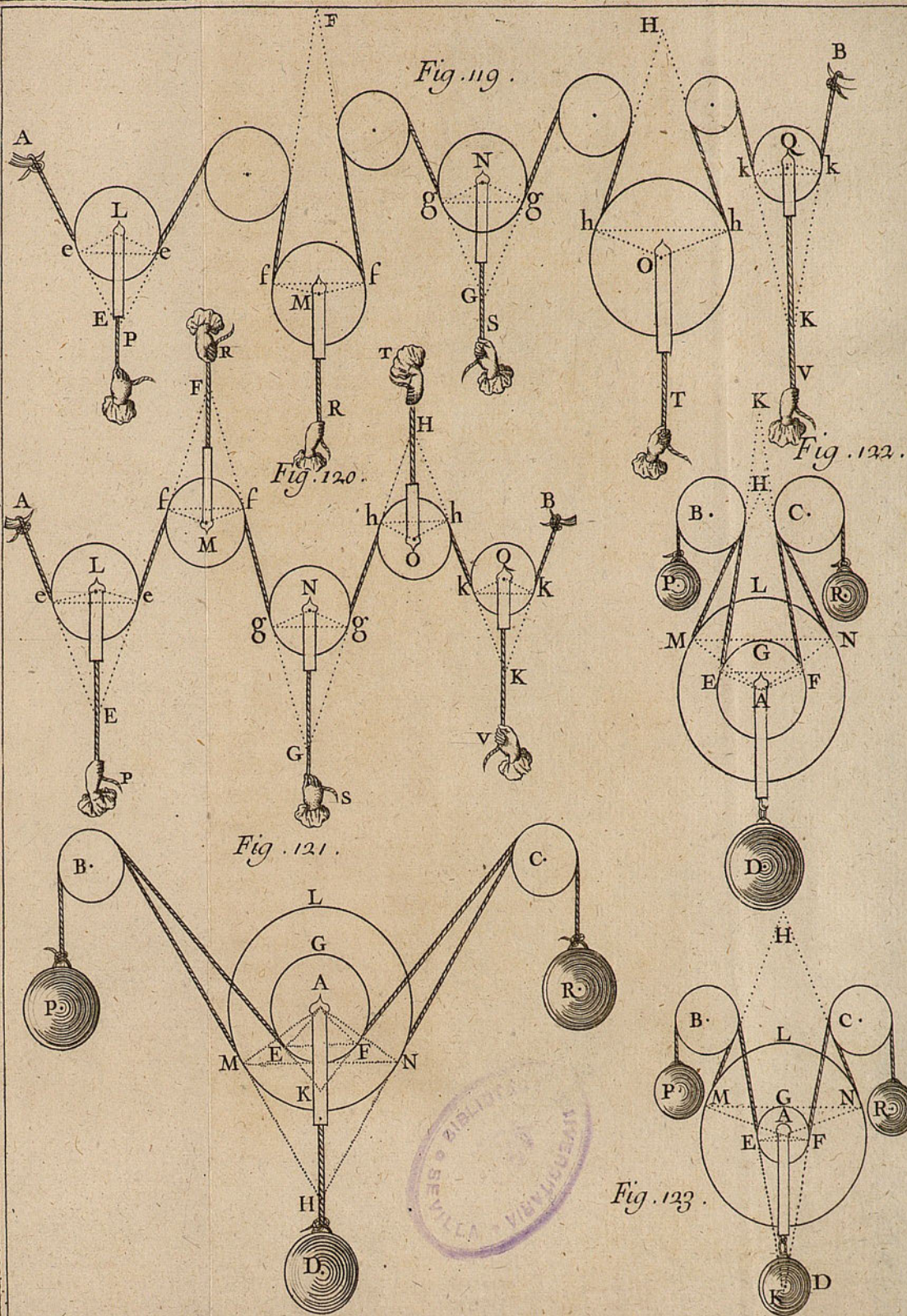
S C H O L I E .

FIG. 121.

122. 123.

Il est à remarquer que si les directions des puissances P, R, étoient ici deux à deux parallèles entr'elles sur chacune des Poulies mobiles MLN, EGF, l'inégalité de ces deux Poulies n'en apporteroit plus aucune entre les deux puissances P, R, de l'une, ni entre les deux de l'autre pour soutenir le même poids D successivement suspendu au centre A de chacune de ces deux Poulies mobiles; puisque ce parallélisme supposé de part & d'autre, rendroit aussi de part & d'autre (*Th. 14. Corol. 2.*) ce même poids D double de chacune de ces deux puissances sur chacune de ces deux Poulies mobiles. Mais il est visible que ce double parallélisme seroit ici impossible, puisque si BM étoit parallèle à CN, & BE à CF, les soutendantes MN, EF, seroient alors diamètres égaux des Poulies mobiles MLN, EGF, lesquelles conséquemment seroient alors égales entr'elles; ce qui est contre l'hypothèse. Il ne peut donc y avoir ici de parallélisme qu'entre les





deux touchantes d'une de ces deux Poulies mobiles MLN, EGF, pendant que les deux touchantes de l'autre feront quelque angle entr'elles.

En ce dernier cas de deux touchantes d'une des deux Poulies mobiles, paralleles entr'elles, pendant que les deux touchantes de l'autre font entr'elles quelque angle fini que ce soit, le present Th. 16. fait voir que les deux puissances P, R, qui soutiendroient le poids D avec des directions paralleles entr'elles, seroient moindres que les deux autres qui le soutiendroient avec des directions concourantes en quelque point que ce fût, & même (Th. 14. Corol. 7. 10.) les plus petites qui le puissent soutenir. Ainsi ce parallelisme pouvant également être entre les deux touchantes de la grande Poulie mobile MLN, & entre les deux de la petite EGF, selon l'éloignement des Poulies fixes B, C, entr'elles; chacune de ces deux Poulies mobiles MLN, EGF, peut ainsi également requérir deux puissances P, R, moindre que ne requeroit l'autre, pour être soutenues l'une après l'autre avec un même poids D à même hauteur de leur centre commun A.

Voilà jusqu'ici pour les Poulies simples & détachées les unes des autres : voici presentement pour celles qui, attachées ensemble à une chape commune par leurs centres, autour desquels elles sont mobiles dans cette chape, font cet assemblage, qu'on appelle Moufle dans la Déf. 18.

THEOREME XVII.

Soit la puissance R en équilibre avec le poids D qu'elle soutienne avec une Moufle mobile & des Poulies fixes, comme dans la Fig. 124. ou avec deux Moufles, dont une soit fixe en Q, & l'autre mobile, comme dans les Fig. 125. 126. par le moyen d'une corde RS RaaO RbbN RecM, laquelle embrassant toutes les Poulies qu'on voit ici, ait une de ses extrémités retenue par la puissance R, & l'autre fixement attachée en M à un crochet dans la Fig. 124. & à la Moufle supérieure QM dans les Fig. 125. 126. En ce cas d'équilibre,

Fig. 124.
125. 126.

I. Le poids D sera toujours à la puissance R , comme la somme des produits faits chacun du sinus de l'angle compris entre les cordons touchans de chaque Poulie mobile, multiplié par tous les sinus des moitiés des autres angles pareillement compris entre les cordons touchans de chacune de toutes les Poulies mobiles, sera au produit fait des sinus des moitiés de tous les angles ainsi compris entre les cordons touchans de tout ce qu'il y a ici de Poulies mobiles.

II. Le poids sera toujours à la puissance R , comme la somme des produits faits chacun de la soutendante de chaque Poulie mobile, multipliée par les rayons de toutes les autres pareillement mobiles, sera au produit des rayons de tout ce qu'il y a ici de ces Poulies mobiles.

DEMONSTRATION.

Soient les soutendantes des Poulies mobiles L, K, H , c'est-à-dire, de leurs arcs embrassez par la corde qui les soutient

$aa, \quad bb, \quad cc$

Les rayons de ces Poulies mobiles $La, \quad Kb, \quad He,$

Les angles compris entre les tangentes de chacune de ces Poulies, menées par les extrémités des soutendantes

RAO, RBN, REM

Les sinus de ces angles totaux $A, \quad B, \quad E$

Les sinus de leurs moitiés $a, \quad b, \quad e$

Parties du poids D soutenues par les Poulies L, K, H ,

$X, \quad Y, \quad Z$

Force de tension de la corde, par tout égale (*Th. 14. Corol. 1.*) à la puissance R

$R, \quad R, \quad R$

PART. I. L'on aura par tout ici (*Th. 14. part. 2.*) $X.R :: A.a$. Et $R.Y :: b.B$. Donc (en multipliant par or-

dre) $X.Y :: A \times b. B \times a$. Et (en composant) $X \rightarrow Y.Y :: A \times b \rightarrow B \times a. B \times a$. Mais on vient de voir $Y.R :: B.b$. Donc (en multipliant par ordre) $X \rightarrow Y.R :: A \times b \rightarrow B \times a. a \times b$. Or (*Th.* 14. *part.* 2.) $R.Z :: e.E$. Donc (en multipliant par ordre) $X \rightarrow Y.Z :: A \times b \times e \rightarrow B \times a \times e. E \times a \times b$. Et (en composant) $X \rightarrow Y \rightarrow Z.Z :: A \times b \times e \rightarrow B \times a \times e \rightarrow E \times a \times b. E \times a \times b$. Mais on vient de voir $Z.R :: E.e$. Donc (en multipliant encore par ordre) $X \rightarrow Y \rightarrow Z.R :: A \times b \times e \rightarrow B \times a \times e \rightarrow E \times a \times b. a \times b \times e$. Or (*Hyp.*) $D = X \rightarrow Y \rightarrow Z$. Donc aussi $D.R :: A \times b \times e \rightarrow B \times a \times e \rightarrow E \times a \times b. a \times b \times e$. Et toujours de même, quelque nombre de Poulies mobiles qu'on puisse ici supposer. *Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.*

PART. II. En ce cas d'équilibre l'on aura aussi (*Th.* 14. *part.* 3.) $X.R :: aa.La$. Et $R.Y :: Kb.bb$. Donc (en multipliant par ordre) $X.Y :: aa \times Kb.bb \times La$. Et (en composant) $X \rightarrow Y.Y :: aa \times Kb \rightarrow bb \times La.bb \times La$. Mais on vient de voir $Y.R :: bb, Kb$. Donc (en multipliant par ordre) $X \rightarrow Y.R :: aa \times Kb \rightarrow bb \times La.La \times Kb$. Or (*Th.* 14. *part.* 3.) $R.Z :: He.ee$. Donc (en multipliant par ordre) $X \rightarrow Y.Z :: aa \times Kb \times He \rightarrow bb \times La \times He.La \times Kb \times ee$. Et (en composant) $X \rightarrow Y \rightarrow Z.Z :: aa \times Kb \times He \rightarrow bb \times La \times He \rightarrow La \times Kb \times ee.La \times Kb \times ee$. Mais on vient de voir $Z.R :: ee.He$. Donc (en multipliant encore par ordre) $X \rightarrow Y \rightarrow Z.R :: aa \times Kb \times He \rightarrow bb \times La \times He \rightarrow ee \times La \times Kb.La \times Kb \times He$. Or (*Hyp.*) $D = X \rightarrow Y \rightarrow Z$. Donc $D.R :: aa \times Kb \times He \rightarrow bb \times La \times He \rightarrow ee \times La \times Kb.La \times Kb \times He$. Et toujours de même, quelque nombre de Poulies mobiles qu'on puisse ici supposer. *Ce qu'il falloit 2^o. démontrer.*

C O R O L L A I R E I.

Il suit de la part. 1. que le poids D feroit à la puissance R, comme le double du nombre des Poulies mobiles est à l'unité, si tous les cordons touchans de ces Poulies mobiles L, K, H, &c. étoient parallèles entr'eux deux à deux sur chacune. Car les angles RAO, RBN, REM, &c. étant alors tous (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) infiniment aigus,

& égaux entr'eux, aussi-bien que leurs moitez; l'on auroit pour lors (*Lem. 7.*) $A=2a$, $B=2b$, $E=2e$, &c. Donc la substitution des seconds termes de ces égalitez au lieu des premiers dans la dernière analogie de la démonstration de la part. 1. donneroit ici pour ce cas de parallélisme deux à deux des cordons touchans chacune de toutes les Poulies mobiles, D. R. : $2a \times b \times e + 2b \times a \times e + 2e \times a \times b$. $a \times b \times e :: 2 + 2 + 2$. 1. : 6. 1. C'est-à-dire, que le poids D seroit alors à la puissance R, comme le double du nombre des Poulies mobiles est à l'unité.

COROLLAIRE II.

La même chose suit aussi de la part. 2. Car en ce cas de parallélisme deux à deux des cordons touchans chacune de toutes les Poulies mobiles, leurs soutendantes aa , bb , ee , &c. en devenant les diamètres, l'on aura pour lors $aa=2La$, $bb=2Kb$, $ee=2He$, &c. Par conséquent la substitution des seconds termes de ces égalitez au lieu des premiers dans la dernière analogie de la démonstration de la part. 2. donneroit ici pour ce cas de parallélisme deux à deux des cordons touchans chacune de toutes les Poulies mobiles, D. R. : $2La \times Kb \times He + 2Kb \times La \times He + 2He \times La \times Kb$. $La \times Kb \times He :: 2 + 2 + 2$. 1. : 6. 1. c'est-à-dire encore, le poids D alors à la puissance R, comme le double du nombre des Poulies mobiles est à l'unité, ainsi que dans le précédent Corol. 1.

COROLLAIRE III.

Il suit encore de la part. 1. que plus les angles RAO, RBN, REM, &c. compris entre les cordons touchans de chacune des Poulies mobiles L, K, H, &c. seront grands, plus sera grande la puissance R requise pour faire ici équilibre avec le poids D. Car les sinus A, B, E, &c. de ces angles totaux étant (*Lem. 8. Corol. 6.*) aux sinus de leurs moitez en raison d'autant moindre que ces angles sont plus grands; & ces sinus A, B, E, &c. d'angles to-

taux étant tous compris dans le troisième terme de la dernière analogie de la démonstration de la part. 1. au lieu que le quatrième terme ne comprend que les sinus des moitiés de ces angles totaux ; il suit que ce quatrième terme sera au troisième en raison d'autant plus grande que ces angles totaux $RAO, RBN, REM, \&c.$ seront plus grands. Mais suivant cette analogie, la puissance R , qui soutient ici le poids D , est à ce poids comme le quatrième terme est au troisième. Donc cette puissance R requise pour soutenir ici le poids D , y doit être d'autant plus grande (quoiqu'en raison différente) que les angles $RAO, RBN, REM, \&c.$ compris entre les cordons touchans de chacune des Poulies mobiles $L, K, H, \&c.$ y seront plus grands, ou (ce qui revient au même) cette puissance R doit être d'autant moindre que ces angles seront plus petits. De sorte que la moindre que cette puissance R puisse être pour faire équilibre ici avec le poids D , c'est lorsque tous ces angles $RAO, RBN, REM, \&c.$ seront infiniment aigus, ou (*Lem. 6. Corol. 1.*) que les cordons touchans des Poulies mobiles, seront parallèles entr'eux comme dans les Corol. 1. 2. Ainsi suivant ces deux mêmes Corol. 1. 2. lorsque cette puissance R est au poids D , comme l'unité est au double du nombre de ces Poulies mobiles, c'est alors qu'elle est la moindre de tout ce qu'il y en peut avoir ici de successivement en équilibre avec ce même poids dans toutes les variétés possibles des angles compris entre les cordons touchans de chacune des Poulies mobiles $L, K, H, \&c.$ c'est-à-dire, dans toutes les positions possibles des parties de la corde qui embrasse ces Poulies.

C O R O L L A I R E I V.

La même chose suit aussi de la part. 2. Car plus les angles $RAO, RBN, REM, \&c.$ compris entre les touchantes des Poulies mobiles $L, K, H, \&c.$ seront grands, plus leurs complémens (à deux droits) $aLa, bKb, eHe, \&c.$ seront petits ; & conséquemment aussi moins sera grande

la raison de leurs soutendantes aa , bb , ee , &c. aux rayons La , Kb , He , &c. de ces Poulies mobiles. Donc ces soutendantes étant toutes comprises dans le troisième terme de la dernière analogie de la démonstration de la part. 2. au lieu que les rayons sont seuls compris dans le quatrième ; la raison du troisième terme au quatrième de cette analogie, & conséquemment aussi du premier D au second R , fera d'autant moins grande que les angles RAO , RBN , REM , &c. le seront davantage. Donc au contraire la puissance R , pour faire équilibre ici avec le poids D , doit y être d'autant plus grande (quoiqu'en raison différente) que ces angles le seront davantage, ainsi qu'on l'a déjà vu dans le précédent Corol. 3. conformément aux Corol. 10. 12. du Th. 14. D'où il suit encore, comme dans le précédent Corol. 3. que la plus petite que cette puissance R puisse être pour soutenir ici le poids D , c'est d'être à lui comme l'unité est au double du nombre des Poulies mobiles ; sçavoir (Corol. 1. 2.) lorsque les parties de la corde, touchantes de ces Poulies, sont toutes parallèles entr'elles.

S C H O L I E.

I. Il est manifeste que quand la puissance R seroit appliquée en P au cordon Pa , qu'elle tire ici suivant aP de bas en haut de la même force qu'elle tire ici suivant SR de haut en bas ; le rapport de cette puissance ou force R en P , au poids D en équilibre (*Hyp.*) avec elle, seroit encore le même que ci-dessus ; puisque (Th. 14. Corol. 1.) le cordon aP seroit alors aussi fortement tiré par la puissance R appliquée en P , & agissant de bas en haut suivant aP , que par cette même puissance R agissante de haut en bas suivant SR , supposé (dis-je) que cette puissance employât précisément la même force de part & d'autre contre le poids D . Mais on voit dans le Corol. 19. du Th. 14. qu'il est bien plus facile d'employer cette quantité de force en tirant de haut en bas, qu'en tirant de bas en haut ; c'est pour cela qu'on n'exprime point
ici

ici les Figures du second de ces deux cas, lesquelles peuvent aisément être supplées par celles du premier, qu'on voit ici Fig. 124. 125. 126. en imaginant ainsi la puissance R en P , tirant de bas en haut le cordon aP de la même force qu'elle tire en agissant de haut en bas suivant SR .

II. On voit aussi, suivant le présent Th. 17. comment un homme peut s'élever soi-même (ainsi qu'on le voit dans les Eglises qu'on veut nettoyer de haut en bas) à la hauteur d'une voute par le moyen de deux Mouflés, dont la supérieure soit attachée en Q à cette voute; puisque si l'on imagine que le poids D soit un panier dans lequel soit cet homme, & que la partie SR de la corde descende jusqu'à lui, en sorte que R soit la main de cet homme; le présent Th. 17. fait voir qu'il lui faudra beaucoup moins de force à cette main pour élever le poids de son corps appuyé sur le fonds du panier, que tout ce fardeau D fait de lui & du panier, ne pèse avec toute la corde & la Moufle inférieure qui doit être enlevée avec lui; & qu'il peut s'enlever ainsi avec d'autant moins de peine qu'il y aura plus de Poulies employées dans les deux Mouflés dont il se servira pour cet effet.

Voilà jusqu'ici pour juger de l'avantage des Mouflés dans le cas où un des bouts de la corde qui embrasse leurs Poulies est fixe: sçavoir, fixement attaché à un crochet fixe, comme dans la Fig. 124. ou à la Moufle supérieure qui est aussi toujours fixe, comme dans les Fig. 125. 126. Voici présentement pour le cas où cette corde tirée par la puissance qui soutient le poids, est attachée par son autre extrémité à la Moufle inférieure toujours mobile avec ce poids.

THEOREME XVIII.

Soit encore la puissance R en équilibre avec le poids D qu'elle soutienne avec une Moufle & des Poulies fixes, comme dans la Fig. 127. ou avec deux Mouflés, dont l'une soit fixe en Q , & l'autre mobile, comme dans les Fig. 128.

Fig. 127.
128. 129.

Kk

129. soit presentement attachée à la Mousfle mobile en M , la corde $MRTEE RNbbROaaRSR$, qui retenue par la puissance R appliquée à son autre extrémité, embrasse encore toutes les Poulies, tant fixes que mobiles, comme on le voit dans les Fig. 127. 128. 129. En ce cas d'équilibre, si d'un point F quelconque du cordon MR on imagine FG perpendiculaire en G sur MG parallèle à la direction CD du poids D ,

I. Ce poids D sera toujours à la puissance R , comme la somme des produits faits chacun du sinus de l'angle compris entre les tangentes de chaque Poulie mobile, multiplié par tous les sinus des moitiés des angles pareillement compris entre les tangentes de toutes les autres Poulies mobiles: comme cette somme (dis-je) multipliée par le sinus total ou de l'angle droit MGF , & augmentée du produit du sinus de l'angle MFG par les sinus des moitiés de tous les angles ainsi compris entre les tangentes de toutes les Poulies mobiles, sera au produit du sinus total ou de l'angle droit MGF par tous les sinus de ces mêmes moitiés d'angles.

II. Le poids D sera aussi toujours alors à la puissance R , comme la somme des produits faits chacun de la soutendante de chaque Poulie mobile, multipliée par les rayons de toutes les autres Poulies pareillement mobiles: comme cette somme (dis-je encore) multipliée par MF , & augmentée du produit de MG par les rayons de toutes les Poulies mobiles, sera au produit de MF par tous ces mêmes rayons.

DEMONSTRATION.

Soient les soutendantes des Poulies mobiles L, K, H , c'est-à-dire, de leurs arcs embrassez par la corde qui les soutient

$aa, bb, cc.$

Les rayons de ces Poulies mobiles $La, Kb, He.$

Les angles compris entre les tangentes de chacune de ces Poulies, menées par les extrémités des soutendantes

$RAO, RBN, RET.$

Les sinus de ces angles A, B, E.
 Les sinus de leurs moitez a, b, e.
 Le sinus de l'angle MFG F, . . .
 Le sinus total ou de l'angle droit MGF. G, . . .

Parties du poids D soutenues par
 le cordon MR, & par les Poulies L, } V, X, Y, Z.
 K, H,

Force de tension de la corde, par
 tout égale (*Th. 14. Corol. 1.*) à la } R, R, R, R.
 puissance R

PART. I. L'on aura (*Lem. 3. part. 1.*) $V.R :: MG.MF$
 (*Lem. 8. Corol. 2.*) $:: F.G$. Et (*Th. 14. part. 2.*) $R.X ::$
 $a.A$. Donc (en multipliant par ordre) $V.X :: F \times a. G \times A$.
 Et (en composant) $V + X.X :: F \times a + G \times A. G \times A$.
 Mais on vient de voir $X.R :: A.a$. Donc (en multipliant
 par ordre) $V + X.R :: F \times a + G \times A. G \times a$. Or (*Th.*
14. part. 2.) $R.Y :: b.B$. Donc (en multipliant par or-
 dre) $V + X.Y :: F \times a \times b + G \times A \times b. B \times G \times a$. Et (en
 composant) $V + X + Y.Y :: F \times a \times b + G \times A \times b + G \times$
 $B \times a. G \times B \times a$. Mais on vient de voir $Y.R :: B.b$. Donc
 (en multipliant par ordre) $V + X + Y.R :: F \times a \times b$
 $+ G \times A \times b + G \times B \times a. G \times a \times b$. Or (*Th. 14. part. 2.*)
 $R.Z :: e.E$. Donc (en multipliant) $V + X + Y.Z :: F \times$
 $a \times b \times e + G \times A \times b \times e + G \times B \times a \times e. G \times a \times b \times E$. Et (en com-
 posant) $V + X + Y + Z.Z :: F \times a \times b \times e + G \times A \times b \times e$
 $+ G \times B \times a \times e + G \times E \times a \times b. G \times E \times a \times b$. Mais on vient de
 voir $Z.R :: E.e$. Donc (en multipliant encore par ordre)
 $V + X + Y + Z.R :: F \times a \times b \times e + G \times A \times b \times e + G \times B \times a$
 $\times e + G \times E \times a \times b. G \times a \times b \times e$. Or (*Hyp.*) $D = V + X + Y$
 $+ Z$. Donc $D.R :: F \times a \times b \times e + G \times A \times b \times e + G \times B \times a \times e$
 $+ G \times E \times a \times b. G \times a \times b \times e$. Et toujours de même quelque
 nombre de Poulies mobiles qu'on puisse ici supposer. Ce
 qu'il falloit 1°. démontrer.

PART. II. En ce cas d'équilibre l'on aura encore
 (*Lem. 3. part. 1.*) $V.R :: MG.MF$. Et de plus (*Th. 14.*
 K k ij

part. 3.) $R. X :: La. aa.$ Donc (en multipliant) $V. X :: MG \times La. MF \times aa.$ Et (en composant) $V + X. X :: MG \times La + MF \times aa. MF \times aa.$ Mais on vient de voir $X. R :: aa. La.$ Donc (en multipliant) $V + X. R :: MG \times La + MF \times aa. MF \times La.$ Or (Th. 14. part. 3.) $R. Y :: Kb. bb.$ Donc (en multipliant) $V + X. Y :: MG \times La \times Kb + MF \times Kb \times aa. MF \times La \times bb.$ Et (en composant) $V + X + Y. Y :: MG \times La \times Kb + MF \times Kb \times aa + MF \times La \times bb. MF \times La \times bb.$ Mais on vient de voir $Y. R :: bb. Kb.$ Donc (en multipliant par ordre) $V + X + Y. R :: MG \times La \times Kb + MF \times Kb \times aa + MF \times La \times bb. MF \times La \times Kb.$ Or (Th. 14. part. 3.) $R. Z :: He. ee.$ Donc (en multipliant) $V + X + Y. Z :: MG \times La \times Kb \times He + MF \times Kb \times He \times aa + MF \times La \times He \times bb. MF \times La \times Kb \times ee.$ Et (en composant) $V + X + Y + Z. Z :: MG \times La \times Kb \times He + MF \times Kb \times He \times aa + MF \times La \times He \times bb + MF \times La \times Kb \times ee. MF \times La \times Kb \times ee.$ Mais on vient de voir $Z. R :: ee. He.$ Donc (en multipliant encore par ordre) $V + X + Y + Z. R :: MG \times La \times Kb \times He + MF \times Kb \times He \times aa + MF \times La \times He \times bb + MF \times La \times Kb \times ee. MF \times La \times Kb \times He.$ Or (Hyp.) $D = V + X + Y + Z.$ Donc $D. R :: MG \times La \times Kb \times He + MF \times Kb \times He \times aa + MF \times La \times He \times bb + MF \times La \times Kb \times ee. MF \times La \times Kb \times He.$ Et toujours de même encore, quelque nombre de Poulies mobiles qu'on puisse ici supposer. *Ce qu'il falloit 2.^o démontrer.*

C O R O L L A I R E I.

Il suit de la part. 1. que si tous les cordons touchans des Poulies mobiles L, K, H, &c. étoient parallèles entre eux; & conséquemment (Lem. 6. Corol. 1.) à la direction CD du poids D; ce parallélisme rendant alors $A = 2a$, $B = 2b$, $E = 2e$, comme dans le Corol. 1. du Th. 17. l'on auroit ici (en substituant ces valeurs de A, B, E, dans la dernière analogie de la démonstration de cette part. 1.) $D. R :: F \times a \times b \times e + 2 G \times a \times b \times e + 2 G \times b \times a \times e + 2 G \times e \times a \times b. G \times a \times b \times e :: F + 6 G. G.$ De sorte que si les Poulies, tant fixes que mobiles, étoient de diamètres tels, dans la Fig.

128. placées de maniere dans la Fig. 127. que le cordon MR fut aussi pour lors parallele à la direction CD du poids D, & qu'il le pût être dans la Fig. 128. alors l'angle MFG se trouvant ainsi droit & égal à MGF, & conséquemment ayant alors son sinus F égal au total G, donneroit D. R. :: 7 G. G. :: 7. 1. c'est-à-dire, que le poids D ainsi en équilibre avec la puissance R par le moyen de deux Mouffles, & d'une corde attachée à la Moufle mobile, seroit alors à cette puissance R, comme le double du nombre des Poulies mobiles, augmenté de l'unité, c'est-à-dire, comme ce double plus l'unité seroit à l'unité; au lieu que dans ce cas de parallelisme ce poids seroit seulement à cette puissance (Th. 17. Corol. 1. 2.) comme le double du nombre des Poulies mobiles seroit à l'unité, si la corde étoit attachée à la Moufle supérieure, ou à quelque point fixe.

C O R O L L A I R E II.

La même chose suit aussi de la part. 2. Car ce cas de parallelisme des cordons touchans des Poulies mobiles L, K, H, rendant $aa = 2La$, $bb = 2Kb$, $ee = 2He$, comme dans le Corol. 2. du Th. 17. la substitution de ces valeurs des soutendantes aa , bb , ee , dans la dernière analogie de la démonstration de cette part. 2. donneroit ici D. R. :: $MG \times La \times Kb \times He + 2MF \times La \times Kb \times He + 2MF \times La \times Kb \times He + 2MF \times La \times Kb \times He. MF \times La \times Kb \times He :: MG + 6MF. MF$. De sorte que si les Poulies, tant fixes que mobiles, étoient de diamètres tels dans la Fig. 128. & placées de maniere dans la Fig. 127. que le cordon MR fût aussi pour lors parallele à la direction CD du poids D, & qu'il le pût être dans la Fig. 128. alors MF se trouvant ainsi égale à MG, donneroit D. R. :: 7MF. MF :: 7. 1. ainsi que dans le précédent Corol. 1.

C O R O L L A I R E III.

Il suit encore des part. 1. 2. que plus les angles RAO, RBN, RET, &c. compris entre les touchantes des Poulies

mobiles L, K, H, &c. seront grands, aussi-bien que l'angle FMG, plus la puissance R devra être grande (quoi qu'en raison différente) par rapport au poids D, pour demeurer en équilibre avec lui comme ci-dessus. Cela se prouvera comme les Corol. 3. 4. du Th. 17. D'où il suit, comme dans ces Corol. 3. 4. du Th. 17. que plus au contraire ces angles RAO, RBN, RET, &c. seront petits, plus aussi la puissance R devra être petite pour faire équilibre ici avec le même poids D; & qu'ainsi la moindre qu'elle puisse être pour cela, c'est lorsque tous ces angles seront infiniment petits, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 1.*) lorsque les cordons touchans des Poulies seront tous parallèles entr'eux; auquel cas les précédens Corol. 1. 2. font voir que la puissance R seroit ici au poids D en équilibre (*Hyp.*) avec elle, comme l'unité seroit au double du nombre des Poulies mobiles, augmenté de cette unité. Donc la moindre que la puissance R puisse être ici pour faire équilibre avec le même poids D, c'est de lui être en cette raison, qui dans le cas présent de trois Poulies mobiles, seroit (*Corol. 1. 2.*)::1.7.

COROLLAIRE IV.

On voit de-là, suivant les Corol. 3. 4. du Th. 17. que l'usage qu'on fait ici des Poulies mobiles, est encore plus avantageux que celui qu'on en a fait dans ce Th. 17. c'est-à-dire, qu'il est plus avantageux d'attacher à la Moufle mobile qu'à la fixe, ou qu'à quelque crochet fixe, le bout de la corde qui doit l'être à l'une ou à l'autre de ces deux Moufles, ou à un crochet fixe, dans l'un & dans l'autre de ces deux usages des Poulies. Puisqu'en cas d'équilibre entre la puissance R & le poids D sur ces deux Moufles, ou sur un soutenu de Poulies fixes, la moindre que la puissance R puisse être par rapport à ce poids, lorsque le bout de la corde qui embrasse les Poulies, est attaché à la Moufle fixe, ou à un crochet fixe, c'est (*Th. 17. Corol. 3. 4.*) d'être à ce poids comme l'unité est au double du nombre des Poulies mobiles; au lieu que la

moindre des puissances R requises pour faire équilibre avec le même poids D, lorsque ce bout de corde est attaché à la Moufle mobile, ne doit être à ce poids (*Corol. 3.*) que comme l'unité est au double du nombre des Poulies mobiles, augmenté de cette unité.

S C H O L I E.

Il est visible ici, comme dans l'art. 1. du Schol. du Th. 17. que quand la puissance R seroit appliquée en P au cordon PA; qu'elle tirât suivant aP de bas en haut de la même force qu'elle tire ici le cordon SR de haut en bas; le rapport de cette puissance ou force R au poids D en équilibre (*Hyp.*) avec elle, seroit encore le même que ci-dessus. Cela se prouvera encore comme dans cet art. 1. du Schol. du Th. 17.

On prouvera aussi de même ici que dans l'art. 2. de ce Schol. du Th. 17. qu'un homme peut s'élever soi-même & seul, par exemple, jusqu'à la voute d'une Eglise par le moyen de deux Moufles, au mobile desquelles la corde qui embrasse les Poulies, soit attachée comme à la Moufle fixe; & le précédent Cor. 4. fait voir qu'il sera plus avantageux de s'en servir de la première manière supposée dans le présent Th. 18. que de la seconde supposée dans le Th. 17. c'est-à-dire, (toutes choses d'ailleurs étant égales) qu'un homme qui voudra s'élever ainsi soi-même par le secours de deux Moufles, n'aura pas besoin (*Corol. 4.*) d'y employer tant de force, lorsque la corde qui embrasse les Poulies, sera attachée à la Moufle mobile, que lorsqu'elle le sera à la Moufle fixe.

Outre la méprise remarquée dans la réflexion qui suit le Corol. 17. du Th. 14. par rapport aux Poulies mobiles séparées, les Corol. 1. 2. 3. 4. des précédens Th. 17. 18. en font voir encore deux autres par rapport aux Poulies jointes plusieurs ensemble en Moufles mobiles, dans lesquelles par inadvertence, sont aussi tombez les Auteurs de la proposition rapportée dans la réflexion qui suit le Corol. 12. du Th. 14. lesquels lui donnant encore ici un usage trop étendu, ont avan-

cé sans restriction, que dans l'équilibre d'une puissance avec un poids suspendu à une Moufle mobile armée de plusieurs Poulies.

1°. *Si la corde qui les embrasse est attachée par un bout à une autre Moufle fixe, ou à un crochet pareillement fixe; cette puissance est à ce poids, comme l'unité est au double du nombre des Poulies de centres mobiles. Ce qui sur une infinité de cas n'est vrai que dans celui où les cordons touchans des Poulies sont tous paralleles entr'eux, & est faux dans tous les autres, ainsi que les Corol. 1. 2. 3. 4. du Th. 17. le font voir.*

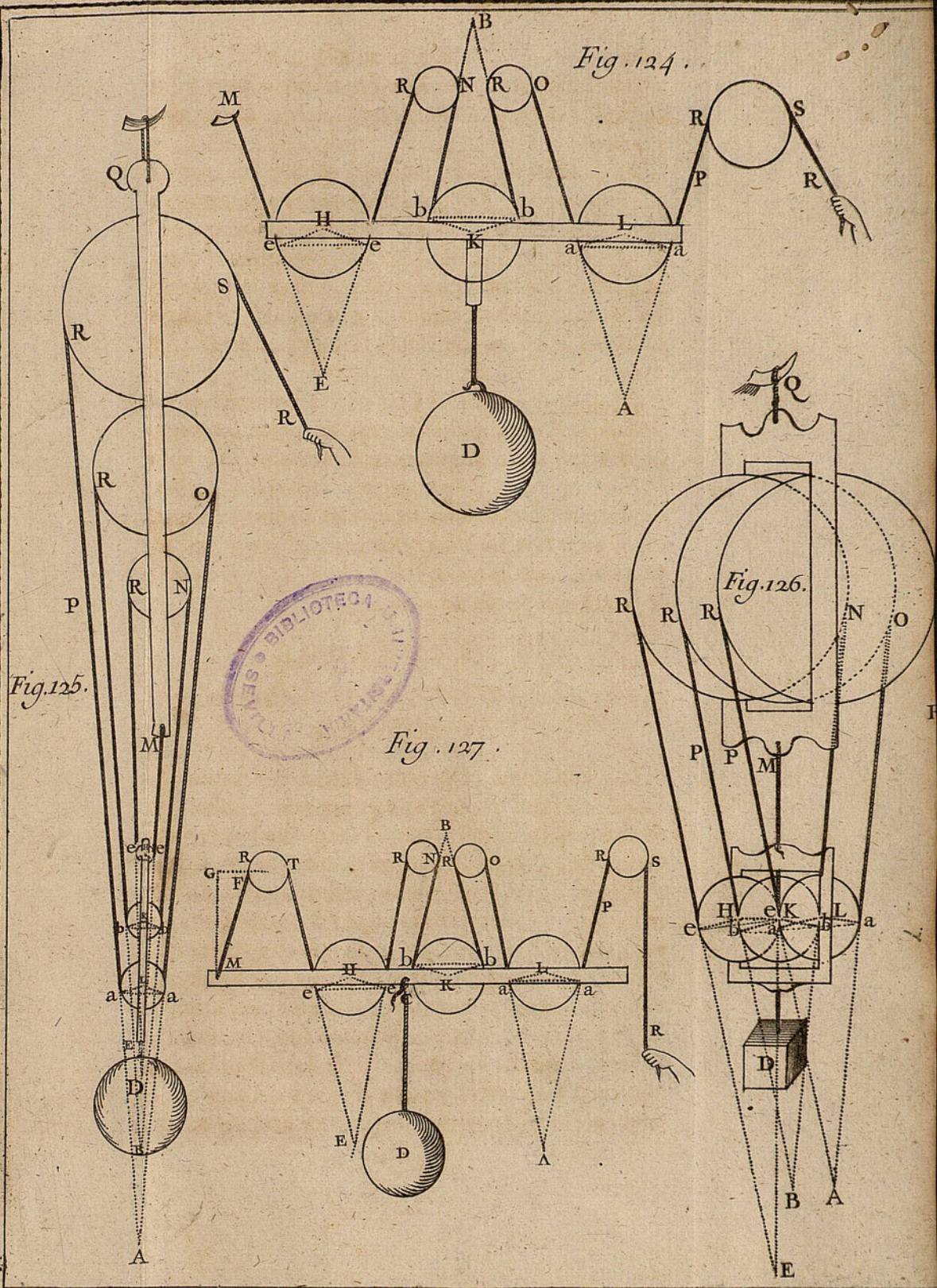
2°. *Si la corde qui embrasse les Poulies est attachée à la Moufle mobile; la puissance est au poids, comme l'unité est à elle-même augmentée du double du nombre des Poulies mobiles. Ce qui sur une infinité de cas ne pourroit encore être vrai que dans celui où les cordons touchans des Poulies seroient tous paralleles entr'eux, & seroit faux dans tous les autres, ainsi que les Corol. 1. 2. 3. 4. du précédent Th. 18. le font pareillement voir.*

REMARQUE

Sur les précédentes Sections 2. 3. touchant l'usage de ce qui y est contenu.

La précédente réflexion jointe à celles qui suivent les Corol. 12. & 17. du Th. 14. fait voir combien on est loin de son compte, quand dans l'usage des Poulies on calcule le rapport de la puissance au poids, comme si les cordons touchans de ces Poulies étoient toujours paralleles entre-eux; & qu'on doit avoir autant d'égard aux angles que ces cordons font entr'eux, que si prolongez ils étoient autant de branches de corde, noüées à celle du poids aux points où ils en rencontrent la direction, ainsi que dans les Fig. 75. 76. & que ce poids ne fût ici comme là, que soutenu avec des cordes seules & sans Poulies. Par exemple, qu'il faut avoir autant d'égard à l'angle PAR que font entr'eux les cordons ou parties prolongées PM, RN.

de



de la corde PMNR, avec laquelle les puissances P, R, soutiennent le poids D par le moyen de la Poulie mobile MON dans la Fig. 130. que si ces puissances le soutenoient sans aucune Poulie avec les seules cordes PA, RA. nouées en A avec celle AD de ce poids D, ainsi que dans la Fig. 131.

FIG. 130.
131.

II. Presentement pour avoir ces angles, par exemple, l'angle PAR dans la Fig. 130. dans laquelle les prolongemens MA, NA, des cordons PM, RN, n'étant qu'imaginez, cet angle PAR ou MAN, n'est pas visible; il n'y a qu'à appliquer à un de ces cordons, par exemple, à RN le côté BC d'un quart de cercle gradué BCD, au centre B, duquel pende un petit poids H, au bout d'un fil de soye BH; prendre garde, lorsque ce poids H sera en repos, par quel point F de ce quart de cercle ce fil passera: l'on aura pour lors l'angle CBF ou ABH égal au nombre des degrez compris dans l'arc CF, & consequemment aussi l'angle RAL, puisque les directions LD. BH, paralleles (*Hyp.*) entr'elles, rendent les angles alternes LAB, HBA, égaux entr'eux. Cet angle RAL étant ainsi trouvé, l'on aura consequemment aussi l'angle PAL, qui lui est égal, puisque RA, PA, sont tangentes de la Poulie MON, dont L est le centre. Donc l'on aura aussi l'angle total PAR fait de ces deux-là, & double de chacun d'eux. Par consequent le poids D étant ici (*Th.* 14. *part.* 2.) à chacune des puissances P, R, en équilibre (*Hyp.*) avec lui, dans la raison du sinus de l'angle total PAR au sinus de sa moitié; l'on aura par ce moyen en nombres requis dans la pratique, le rapport de ce poids à chacune de ces puissances, & consequemment aussi un des trois étant donné, chacun des deux autres sera pareillement connu.

FIG. 130.

Si l'on veut ce rapport sans sinus, il n'y a qu'à mener les rayons LM, LN, aux points d'attouchement M, N, avec la soutendante MN de l'arc de la Poulie, embrassé par la corde PMNR; & la *part.* 3. du *Th.* 14. donnera ce rapport du poids D à chacune des puissances P, R, en

raison de cette soutendante MN à chacun des rayons LM, LN, de la Poulie. Mais parce que pour connoître cette soutendante MN, il faut avoir recours aux sinus des angles trouvez ci-dessus, le plus court & le plus commode dans la pratique est de s'en tenir tout d'un coup à ces sinus, ainsi qu'on l'a déjà dit dans la Remarque qui est dans le Scholie du Th. 14.

Fig. 131.

III. Quant aux poids soutenus seulement avec des cordes, comme dans la Fig. 131. l'on aura, de même que dans le précédent art. 2. les angles RAL, PAL, dont le côté AL est sur la direction DA prolongée du poids D, & conséquemment aussi les angles PAR, PAD, RAD, que les cordes font entr'elles, en appliquant successivement le côté BC du quart de cercle gradué de l'art. 2. sur chacun des cordons AR, AP, des puissances P, R, en équilibre (*Hyp.*) avec le poids D; & en prenant garde, comme dans cet art. 2. sur quel degré F, E, s'arrêtera le fil BH du poids H dans chacune de ces deux positions: les angles CBF, CBE, alors connus, donneront leurs alternes RAL, PAL, par le moyen desquels les trois angles précédens PAR, PAD, RAD, seront aussi connus avec leurs sinus que la table des sinus donnera en nombres. Donc le poids D étant ici (*Th. 1. Corol. 4. ou Th. 2. Corol. 7.*) à chacune des puissances P, R, en équilibre (*Hyp.*) avec lui, dans la raison du sinus de l'angle PAR au sinus de chacun des angles RAD, PAD; l'on aura aussi pour lors en nombres le rapport de ce poids à chacune de ces deux puissances: de sorte que ce poids étant donné, on connoîtra pour lors chacune d'elles; ou une d'elles étant donnée, on connoîtra aussi l'autre avec ce poids.

Quelque nombre de branches qu'ait la corde avec laquelle un poids est soutenu par tant de puissances qu'on voudra, & de quelque nombre de nœuds que les branches partent, les angles qu'elles feront chacune avec celle qui en fera comme la tige, se trouveront comme ci-dessus par le moyen du quart de cercle CBD, dont on

vient de se servir, en commençant par le nœud où pend immédiatement le poids, c'est-à-dire, par le nœud qui en est le plus voisin : En operant (dis-je) comme ci-dessus, on aura tous les angles que les branches de ce nœud feront chacune avec le fil BH du plomb H de l'instrument CBD, & conséquemment chacun des angles que chacune de ces branches fera avec la direction du poids qu'elles soutiennent, supposée parallele à celle du plomb H, ou de son fil BH. Cet instrument appliqué ensuite de même sur chacune des branches dans lesquelles chacune de ces premières se subdivise, donnant encore de même l'angle que chacune de ces secondes branches fera avec son fil BH, donnera conséquemment l'angle que chacune d'elles fera avec celle des premières dont elle fera la branche, & dont cet instrument aura déjà donné l'angle avec la direction du poids en question. Ce même instrument donnera pareillement les angles que ces secondes branches feront chacune avec chacune de celles dans lesquelles elles se subdiviseront encore immédiatement ; & toujours de même dans quelque nombre de branches que ces troisièmes se subdivisent encore, & quelque loin qu'aillent ces subdivisions de chaque branche. Ce qui étant ainsi connu, les Th. 1. 2. 4. 5. 6. 7. donneront en nombres, par le secours de la Table des sinus, le rapport de chaque poids à chacune des puissances qui le soutiendront ainsi ensemble avec des cordes seulement, à quelque nombre de branches, & suivant quelques directions qu'elles leur soient appliquées.

I V. Dans les pratiques précédentes (art. 2. 3.) il faut bien prendre garde à ce qu'on y a marqué, que pour qu'elles soient justes, la direction BH du fil de l'instrument y doit être parallele à celle du poids soutenu, soit avec des Poulies, ou avec des cordes seulement, par les puissances dont on cherche les rapports avec lui ; ce qui suppose les directions des poids paralleles entr'elles : supposition cependant fautive à la rigueur ; mais qui sensiblement vraie, ne laisse pas de suffire dans la pratique, où

l'on doit se contenter de l'à-peu-près du but , lorsqu'on n'y sçauroit atteindre. Il faut pourtant avouer que pour pouvoir juger si l'on est près ou loin du but , il faut sçavoir où il est. C'est pour cela qu'un Géomètre y doit toujours tendre, jusqu'à ce qu'il l'ait enfin apperçû, afin que le voyant il puisse ensuite dans la pratique en approcher le plus près qu'il lui sera possible, & rendre ainsi par le secours de la théorie, la pratique la moins fautive qu'elle puisse être: elle l'est toujours nécessairement quelque peu; faute d'assez d'adresse, & de sens assez fins dans la construction & dans l'usage des Instrumens qu'on y employe; mais elle l'est bien davantage, quand à ce défaut est joint celui de ne pas voir précisément où l'on tend. Cela soit dit en passant pour desabuser ceux qui effrayez des difficultez de la théorie inventrice & directrice de la pratique, & qui pour dédommager leur vanité de l'ignorance qu'ils en ont, ne se piquent que de pratiques, par lesquelles ils croient pouvoir arriver à des à-peu-près qu'ils ne voyent pas: semblables en cela à des aveugles qui voudroient jouer à la boule, sans sçavoir même de quel côté est le but.

FIG. 132.

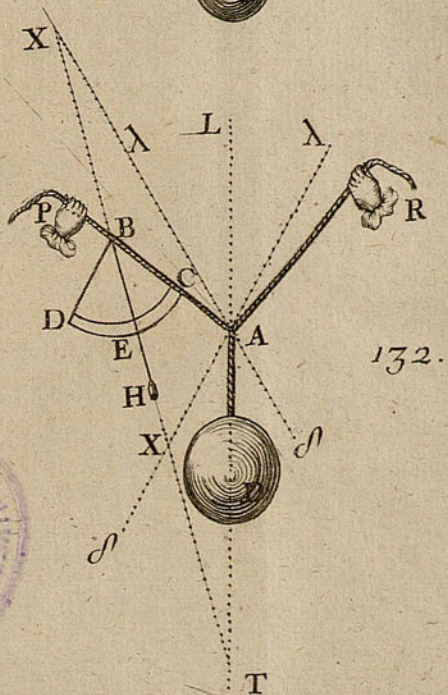
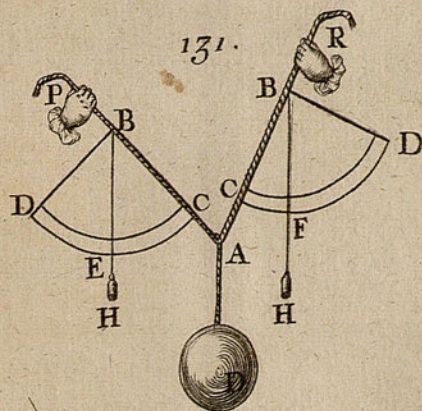
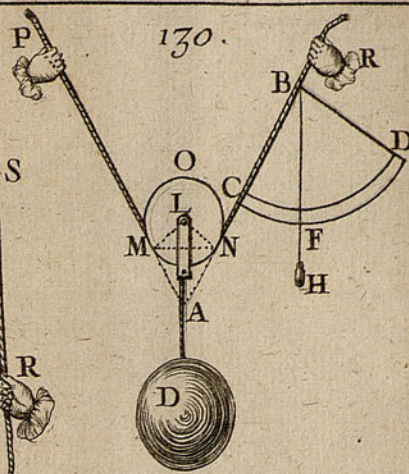
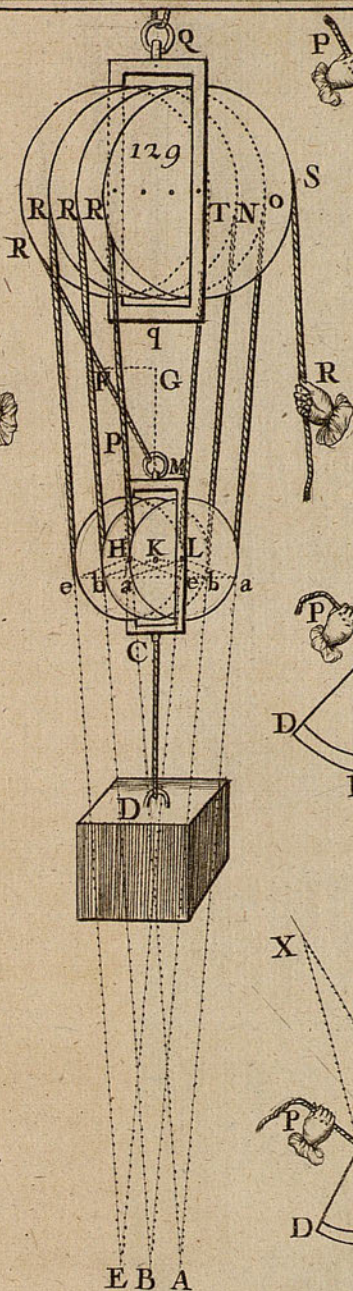
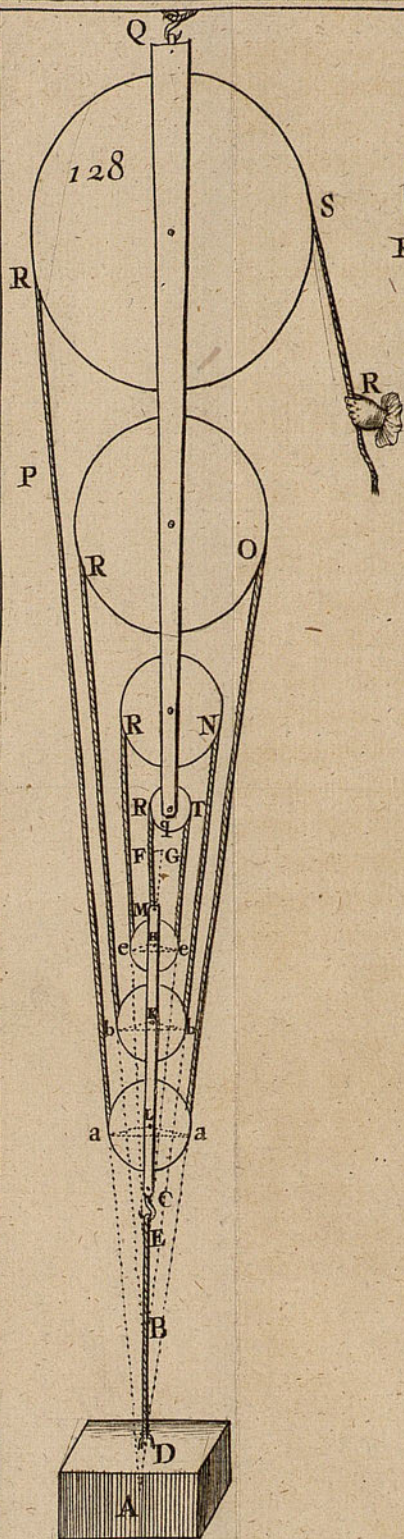
Pour le voir ici dans le cas des directions des poids non paralleles entr'elles, la théorie d'un Géomètre le conduira à la connoissance des angles compris tant entre ces directions, qu'entr'elles & celles des puissances qui soutiennent ces poids, les distances du point de concours des directions de ces poids, à leurs points de suspension, & de leurs points de suspension entr'eux étant données; & de-là par les Théoremes précédens, à la connoissance du rapport cherché de chacun de ces poids à chacune des puissances qui les soutiennent avec des Poulies, ou avec des cordes seulement. Par exemple, le poids D étant encore ici soutenu par les puissances P, R, avec des cordes seulement, comme dans le précédent art. 3. si l'on suppose que les directions de ce poids suspendu en A, & du poids H suspendu en B au centre du quart de cercle BCD appliqué comme dans cet art. 3. au cordon AP, concou-

rënt en quelque point T, qui soit (si l'on veut) le centre de la Terre ; les distances AT, AB, étant données, l'angle CBE ou ABT que le filet BH en repos, fera pour lors connoître sur l'instrument, donnera par la Trigonométrie les autres angles BTA, BAT, du triangle ABT, & conséquemment aussi l'angle PAL, complément (à deux droits) de BAT : on trouvera de même les angles RAT, RAL ; & de-là aussi l'angle $PAR = PAL - RAL$. Si les trois distances AT, AB, BT, étoient données, la Trigonométrie donneroit encore presque de même les angles PAR, PAT, RAT, sans le secours d'aucun instrument ; & ces trois angles étant ainsi connus, le Corol. 4. du Th. 1. ou le Corol. 7. du Th. 2. donneroit enfin le rapport cherché du poids D à chacune des puissances P, R, qui le soutiennent (*Hyp.*) avec des cordes seulement. Ce rapport se trouveroit de même, si ces puissances P, R, soutenoient ce poids D avec la Poulie MON de la Fig. 130. dans ce cas des directions des poids, concourantes en quelque point que ce fût, dont les distances aux points de suspension de ces poids, & celles de ces points entr'eux, fussent données.

Il est vrai que la distance AT au centre T de la Terre seroit ici énorme par rapport à AB, & la distance BT si peu différente de AT, que les yeux n'y verroient que comme si ces distances AT, BT, étoient parallèles entr'elles ; & qu'ainsi dans la pratique il faudroit s'en tenir ici à celle des précédens art. 2. 3. Mais du moins un Géomètre seroit-il content de l'avoir conduite (*art. 2. 3.*) aussi près du but qu'elle peut aller, & de voir comment il l'y meneroit juste, si l'instrument & ses yeux répondoient à sa théorie. Outre ce contentement il auroit encore celui de voir que cette maniere de chercher ici les rapports du poids aux puissances qui le soutiennent, toute impraticable que la rend le trop grand éloignement du point de concours des directions des poids entr'elles, ne laisse pas d'avoir son utilité dans tous les cas où les angles de ces directions entr'elles sont sensibles. Par exemple, si au lieu

du poids D , c'étoit une puissance \mathcal{J} , qui fût en équilibre (comme lui) avec les deux puissances P, R , ; & qui, au lieu de tendre au centre T de la Terre comme lui, & le poids H , eût sa direction $A\mathcal{J}$ vers tout autre point \mathcal{J} tel qu'elle rencontrât la direction prolongée BT du plomb H en quelque point X assez voisin pour causer une égalité ou une différence sensible & reconnoissable entre AX, BX : la pratique précédente devient alors utile & même nécessaire en ce cas des directions concourantes du plomb H & de la puissance \mathcal{J} . Cette pratique donnant donc en ce cas de concours en X , les angles $PA\mathcal{J}, RA\mathcal{J}$, avec leurs complemens $PA\lambda, RA\lambda$, comme elle auroit donné ci-dessus les angles PAT, RAT , avec leurs complemens PAL, RAL , dans le cas du concours en T des directions des poids D, H , si le trop grand éloignement de ce point n'en eût empêché l'usage; elle donnera ici les angles $PAR, PA\mathcal{J}, RA\mathcal{J}$, comme elle auroit donné là PAR, RAD, PAD . Par conséquent, suivant cette même pratique, le Corol. 4. du Th. 1. ou le Corol. 7. du Th. 2. donnera ici les rapports des puissances \mathcal{J}, P, R , entr'elles, comme il auroit donné là le rapport du poids D à chacune des puissances P, R . Tout cela s'appliquera de même aux puissances en équilibre entr'elles sur des Poulies, l'étant alors (suivant tout ce qui précède) comme si elles y étoient avec des cordes seulement. Tout cela est présentement trop clair pour s'y arrêter davantage.







SECTION IV.

Du Tour, & des autres Machines qui y ont rapport.

D E F I N I T I O N X X.

LE *Tour* est une Machine faite d'une Roue ou d'un Tambour fermement assemblé avec un Cylindre ou Rouleau, qui l'enfile par le milieu suivant son axe, lequel devient aussi pour lors celui de ce Cylindre. Fig. 133.

Cette Machine sert à élever ou à tirer des fardeaux. P attachez au bout d'une corde qu'une puissance R, appliquée à la circonférence du Tambour BB, fait filer ou entortiller autour du Cylindre CC, en faisant tourner la Machine entière (comme d'une pièce) autour de son axe EF appuyé par ses extrémités E, F, dans les trous ou sur les fentes de deux appuis fermes GH, GH. Les Latins appellent cette Machine *Axis in peritrochio*; nom emprunté du Grec; *Axis*, c'est le Cylindre ou Rouleau CC, & *Peritrochium*, c'est le Tambour ou la Roue BB.

Pour avoir plus aisément prise sur ce Tambour, on implante dans des trous faits à sa circonférence, des bâtons ou bras BD, que Pappus (liv. 8.) appelle *Scytale*.

Fort souvent on se contente d'implanter ces bâtons ou bras dans le Cylindre même sans Tambour, perpendiculairement à son axe, comme l'on voit dans la Fig. 134. Fig. 134. Lorsque ce Cylindre ou Rouleau est horizontal, cette Machine s'appelle ordinairement *Treuil* ou *Singe*; & lorsqu'il est vertical, elle s'appelle *Vindas*, *Cabestan*, *Vireveau*, *Guindeau*, ou *Guindas*. Vitruve l'appelle *Sucula* dans la première situation, & *Ergata* dans la seconde.

Les *Tarieres*, les *Roues* ou *Rouleaux à Manivelles*, les *Roues des Moulins*, les *Roues dentées avec Rouleaux* ou *Pignons*, les *Crics* résultans du mutuel engrenement des *Roues*

dentées dans des Pignons, les Grues, &c. se rapportent à cette Machine, c'est-à-dire, au Tour, au Treuil, ou au Vindas. Voici presentement le rapport des forces qu'il y faut employer.

THEOREME XIX.

Fondamental de la presente Section 4.

Fig. 135.
& suivantes
jusqu'à 142.

Soit le tambour BB de la Fig. 133. exprimé ici en profil dans les Fig. 135. 136. 137. 138. par la roue ou le cercle BBNB; son cylindre ou rouleau CC, par le cercle CMC concentrique à celui-là; & son axe EF avec ses poles E, F, par le centre A de ces deux cercles: & de même du cylindre & de l'axe du Treuil ou Vindas de la Fig. 134. dans les Fig. 139. 140. 141. 142. Cela supposé, soient deux puissances quelconques P, R, appliquées à chacune de ces Machines des Fig. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. suivant telles directions MP, NR, qu'on voudra, posées dans des plans perpendiculaires à l'axe de la Machine.

I. Ces deux puissances P, R, agiront ensemble sur cette Machine, comme si elles étoient dirigées suivant un même plan perpendiculaire à l'axe de cette même Machine.

II. S'il y a équilibre entre ces deux puissances P, R, ainsi regardées comme dans un même plan CMC perpendiculaire à l'axe de la Machine; quelqu'angle PER que leurs directions MP, RN, fassent entr'elles, la direction EF de la force résultante (princ. gener. & Lem. 3.) de leur concours, passera toujours par l'axe immobile de la Machine, ou par le centre fixe A du cercle CMC, qui représente cet axe fixe.

III. En ce cas d'équilibre, si de cette direction EA prolongée on imagine dans l'angle GEH compris entre les directions MP, NR, pareillement prolongées des puissances P, R, une partie quelconque EF depuis le sommet E de cet angle, sur laquelle (comme diagonale) soit un parallélogramme GH, qui ait ses côtes EG, EH, sur ces directions MP, NR, prolongées des puissances P, R; la charge de l'axe ou centre fixe A de la Machine, sera toujours dirigée suivant cette diagonale EF, & à chacune de ces puissances P, R, comme cette diagonale

male EF à chacun de ces côtez EG , EH , qui leur répondent sur leurs directions.

I V. Reciproquement si la direction EF de la force résultante du concours des puissances P , R , passe par l'axe ou centre fixe A de la Machine, il y aura équilibre entre ces puissances; & la charge de cet appui A résultante de leur concours, sera pour lors dirigée suivant EF , & à chacune de ces deux puissances dans la précédente raison (part. 3.) de la diagonale EF du parallélogramme GH à chacun de ses côtez EG , EH , qui leur répondent sur leurs directions.

V. Pareillement si la diagonale EF prolongée du parallélogramme GH passe par l'appui A , & que les puissances P , R , soient entr'elles comme les côtez EG , EH , de ce parallélogramme, pris sur leurs directions; ces deux puissances demeureront en équilibre entr'elles sur cet appui A , & la charge de cet appui, résultante de leur concours, sera encore pour lors dirigée suivant EF , & à chacune de ces deux puissances P , R , comme la diagonale EF à chacun des côtez EG , EH , qui leur répondent dans ce parallélogramme GH .

DEMONSTRATION.

PART. I. A quelque point de la surface du rouleau exprimé ici par le cercle CMC , que le poids ou la puissance P soit appliquée perpendiculairement à l'axe de ce rouleau, il est manifeste, suivant l'ax. 2. que cette puissance P y doit agir sur ce rouleau pour le faire tourner autour de son axe, comme elle feroit ici en M , si elle y étoit appliquée dans le plan de ce cercle CMC , suivant une direction MP parallèle à celle qu'elle auroit-là. Donc la puissance R étant aussi (Hyp.) suivant une direction RN posée dans ce même plan CMC , ces deux puissances P , R , doivent ici agir ensemble sur la Machine comme si elles y étoient dirigées toutes deux suivant ce même plan CMC perpendiculaire (Hyp.) à l'axe de cette Machine. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

PART. II. Le principe general, & le nomb. 1. du Corol. 1. du Lem. 3. font voir que du concours des puissances

M m

P, R, il doit résulter sur la Machine ici supposée, une troisième force suivant quelque ligne EF qui passe par le concours E, & dans l'angle GEH des directions de ces deux puissances, suivant laquelle ligne EF, cette Machine doit être ici poussée ou tirée, comme si, au lieu de l'être par ces deux puissances P, R, elle ne l'étoit que par une seule force égale à la résultante ici de leur concours; & que cette Machine ainsi poussée ou tirée suivant cette ligne EF, se mouvroit effectivement suivant cette direction, si rien ne s'y opposoit. Donc n'y ayant ici (*Hyp.*) d'obstacle qu'en A, cette direction EF de la force résultante du concours des puissances P, R, doit effectivement passer par cet obstacle A dans le cas d'équilibre ici supposé. *Ce qu'il falloit 2^o. démontrer.*

PART. III. L'art. 2. du Corol. 1. du Lem. 3. fait voir que cette force suivant EF, résultante du concours des puissances P, R, doit ici être à chacune de ces puissances, comme la diagonale EF du parallélogramme GH est à chacun de ses côtes EG, EH, qui leur répondent sur leurs directions. Mais dans le cas d'équilibre ici supposé, la résistance de l'appui A, opposée (*part. 2.*) à cette force suivant EF, & en équilibre (*Hyp.*) avec elle, lui est égale par l'ax. 4. & par l'art. 3. du Corol. 2. du Lem. 3. Donc en ce cas d'équilibre cette résistance de l'appui A, ou la charge de cet appui, c'est-à-dire, ce qu'il reçoit ici d'impression du concours des puissances P, R, suivant EF, doit aussi toujours être dirigée suivant EF, & être à chacune de ces deux puissances P, R, comme la diagonale EF du parallélogramme GH est à chacun de ses côtes EG, EH, qui leur répondent sur leurs directions. *Ce qu'il falloit 3^o. démontrer.*

PART. IV. En supposant presentement, comme l'on fait ici, que la direction EF de la force résultante du concours des puissances P, R, passe par l'axe ou par le centre fixe A de la Machine supposée, le Corol. 1. du principe general fait voir que la résistance (*Hyp.*) invincible de cet appui A, doit l'arrêter tout court, & mettre ainsi ces

deux puissances P, R , en équilibre entr'elles sur cet appui ; & conséquemment (*part. 3.*) ne consistant que dans l'impression suivant EF résultante (*Hyp.*) sur lui du concours des puissances P, R , doit aussi pour lors être dirigée suivant EF , & être à chacune de ces puissances comme la diagonale EF du parallélogramme GH est à chacun de ses côtes EG, EH , qui leur répondent sur leurs directions. *Ce qu'il falloit 4°. démontrer.*

PART. V. Puisque (*Hyp.*) les puissances P, R , sont ici entr'elles comme les côtes EG, EH , du parallélogramme GH , qui leur répondent sur leurs directions, l'art. 1. du Corol. 1. du Lem. 3. fait voir que l'impression résultante de leur concours sur la Machine, doit se faire de E vers F suivant la diagonale EF de ce parallélogramme. Donc cette ligne EF prolongée passant (*Hyp.*) par l'appui A , toute la force résultante du concours de ces deux puissances P, R , passera aussi par cet appui A . Par conséquent (*part. 4.*) elles seront en équilibre entr'elles sur cet axe ou appui A , alors chargé de toute cette force ou impression commune suivant EF , & cette charge sera (*part. 3.*) non seulement ainsi dirigée suivant EF , mais encore à chacune de ces deux puissances P, R , comme la diagonale EF à chacun des côtes correspondans EG, EH , du parallélogramme GH . *Ce qu'il falloit 5°. démontrer.*

C O R O L L A I R E I.

En cas d'équilibre, la *part. 3.* donnant ici le poids ou la puissance P à la charge de l'appui $A :: EG. EF$. Et cette charge à la puissance $R :: EF. EH$. l'on aura ici (en raison ordonnée) $P. R :: EG. EH$. c'est-à-dire, les puissances P, R , entr'elles en raison des côtes EG, EH , qui leur répondent sur leurs directions dans le parallélogramme GH . Par conséquent si d'un point quelconque A de la diagonale EF prolongée, on mène AM, AN , perpendiculaires sur les directions MP, NR , pareillement prolongées de ces deux puissances P, R , ces mêmes puissances seront entr'elles (*Lem. 8.*) en raison reciproque de
Mm ij

ces perpendiculaires, c'est-à-dire, $P.R.::AN, AM$. Ce qui dans les Fig. 135. 136. 137. 138. signifie qu'en ce cas d'équilibre le poids ou la puissance P y est toujours à la puissance R , comme le rayon AN de la roue ou du tambour BNB , à la circonférence duquel cette seconde puissance R est appliquée, est au rayon AM du cylindre ou du rouleau CMC , à la circonférence duquel l'autre puissance P est pareillement appliquée; c'est-à-dire, que ces deux puissances P, R , en équilibre (*Hyp.*) entr'elles, y sont alors entr'elles en raison reciproque des rayons ou des diamètres du rouleau & de la roue, aux circonférences desquelles ces deux puissances sont appliquées.

COROLLAIRE I.

Mais en prenant EA dans ces quatre Fig. 135. 136. 137. 138. & dans les quatre autres Fig. 139. 140. 141. 142. c'est-à-dire, dans toutes celles de ce Théorème-ci, pour le sinus total: On sçait (*Déf. 9. Corol. 1.*) que les perpendiculaires AM, AN , sont les sinus des angles AEM, AEN . Donc aussi (*Corol. 1.*) les puissances P, R , supposées en équilibre, sont par tout ici entr'elles en raison reciproque des sinus des angles AEM, AEN , que leurs directions MP, NR , prolongées y font avec celle EA de la charge de l'axe de la Machine, ou de l'appui A , qui exprime cet axe; c'est-à-dire, le poids ou la puissance P à la puissance R , comme le sinus de l'angle AEN est au sinus de l'angle AEM .

COROLLAIRE III.

Cela se voit encore en ce que la charge de l'appui A étant en ce cas d'équilibre (*part. 3.*) à chacune des puissances P, R , comme la diagonale EF du parallelogramme GH est à chacun de ses côtez EG, EH , qui leur répondent sur leurs directions, c'est-à-dire (en appellant cette charge A) A, P, R , en raison des trois grandeurs EF, EG, EH , ou (à cause de $EH=GF$) en raison des trois côtez EF, EG, GF , du triangle EGF , ou (*Lem. 8.*

Corol. 2.) en raison des sinus de ses angles EGF, EFG, EEG, opposez à ces mêmes côtes, ou bien aussi en raison des sinus des angles MEN, AEN, AEM, égaux à ceux-là, ou leurs complemens à deux droits. Ce qui donne, dis-je, encore en ce cas d'équilibre,

1°. Le poids ou la puissance P à la puissance R, en raison du sinus de l'angle AEN au sinus de AEM, ainsi que dans le *Corol. 2.*

2°. Et conséquemment (*Déf. 9. Corol. 1.*) ce poids ou cette puissance P à la puissance R, en raison de AN à AM, ainsi que dans le *Corol. 1.*

C O R O L L A I R E I V.

Cette raison de AN à AM, qui peut varier dans le Treuil ou le Vindas des Fig. 139. 140. 141. 142. selon la différence des angles que la direction RN de la puissance R, y peut faire avec le bras AD ou CD de cette Machine, auquel elle est appliquée, & selon les différentes distances AR de l'axe ou appui A de cette même Machine au point R d'application de cette puissance R à ce bras AD; le rapport des puissances P, R, requis (*Corol. 1. & 3. nomb. 2.*) de AN à AM pour y faire équilibre entr'elles, y peut varier aussi, & conséquemment différentes puissances R différemment appliquées à cette Machine, y peuvent faire équilibre successivement avec le même poids P.

Mais dans le Tour qu'expriment les Fig. 135. 136. 137. 138. le rapport de AN à AM, n'y pouvant non plus changer que ces rayons de la roue & du rouleau de cette Machine tant qu'elle demeure la même, quelques soient d'ailleurs les directions des puissances P, R, qui y sont ou seront appliquées: le rapport de ces puissances P, R, requis (*Cor. 1. & 3. nomb. 2.*) pour y faire équilibre entr'elles, n'y peut jamais varier ni changer, quelque changement qu'il arrive à leurs directions; & conséquemment le même poids P appliqué au rouleau de cette Machine, n'y peut jamais être soutenu en équilibre que par une

Fig. 139.
140. 141.
142.

Fig. 135.
136. 137.
138.

même puissance R appliquée à la roue de cette même Machine, quelques directions qu'on donne à ces deux puissances P, R.

C O R O L L A I R E. V.

FIG. 139.

140. 141.

142.

Les bras CD du Treuil ou du Vindas des Fig. 139. 140. 141. 142. étant (*Hyp.*) perpendiculaires à l'axe de son rouleau, ou à la circonference CMC, qui représente ce rouleau, en sorte que prolongez ils passeroient tous par le centre A de ce cercle, lequel centre A exprime ici l'axe de ce rouleau; si la puissance R tire ou pousse perpendiculairement celui de ces bras auquel elle est appliquée, c'est-à-dire, si elle lui est appliquée suivant une direction ER qui lui soit perpendiculaire & dans le plan du cercle CMC; alors AN perpendiculaire (*Hyp.*) à cette direction ER, tombant sur AR, & se confondant alors avec ce bras de Treuil ou de Vindas, le Corol. 1. & le nomb. 2. du Corol. 3. font voir qu'en cas d'équilibre, le poids ou la puissance P fera pour lors à la puissance R, comme la longueur du bras AR fera au rayon AM du rouleau de cette Machine.

C O R O L L A I R E VI.

FIG. 135.

& suivantes

jusqu'à 142

Il suit aussi de la part. 5. pour tous les cas du Tour & du Treuil ou du Vindas, que si les puissances P, R, y sont entr'elles en raison reciproque des lignes AM, AN, menées de l'appui A perpendiculairement sur les directions MP, NR, de ces puissances, c'est-à-dire, si $P. R. :: AN. AM.$ il y aura équilibre entre ces mêmes puissances P, R. Car si l'on imagine un parallelogramme GH d'une diagonale quelconque EF prise sur la droite EA depuis le point de concours E des directions de ces deux puissances dans l'angle GEH que ces directions font entr'elles, lequel soit conséquemment aussi un angle de ce parallelogramme GH. Le Lemme 8. donnera pour lors $EG. EH :: AN. AM. (Hyp.) :: P. R.$ Donc la diagonale EF prolongée passant ainsi (*constr.*) par l'appui A de la Machine,

les puissances P, R, demeureront par tout ici (*part. 5.*) en équilibre entr'elles.

C O R O L L A I R E V I I.

En prenant ici AE pour le sinus total, le Corol. de la Déf. 9. fait voir que les droites AM, AN, y feront les sinus des angles AEM, AEN, que les directions MP, NR, des puissances P, R, y feront avec cette droite AE. Donc (*Corol. 6.*) lorsque ces deux puissances P, R, seront entr'elles en raison reciproque des sinus des angles compris entre chacune de leurs directions, & la droite menée de l'appui A de la Machine au concours E de ces directions entr'elles; ces mêmes puissances P, R, demeureront encore en équilibre sur cet axe ou appui A.

C O R O L L A I R E V I I I.

Il suit pareillement de chacune des *part. 4. 5.* que si la charge de l'axe ou appui A, tant du Tour que du Treuil ou du Vindas, résultante du concours des puissances P, R, qui y sont appliquées, est à chacune de ces deux puissances, comme le sinus de l'angle MEN compris entre leurs directions prolongées MP, NR, est au sinus de chacun des angles reciproquement pris AEM, AEN, que chacune de ces directions fait avec la droite EA menée de leur concours E à cet appui A; ces deux puissances P, R, demeureront en équilibre entr'elles sur cet appui A. Car si l'on imagine encore le parallelogramme GH fait comme dans le *Corol. 6.* l'on verra pour lors les sinus des angles EGF, FEG, EFG, du triangle EGF être les mêmes que ceux des angles MEN, AEM, AEN; & conséquemment (*Lem. 8. Corol. 2.*) le premier de ces sinus-ci être à chacun des deux autres, comme le côté EF de ce triangle EGF est à chacun de ses deux autres côtes GF, EG, c'est-à-dire (à cause de $EH = GF$) comme la diagonale EF du parallelogramme GH est à chacun de ses côtes EH, EG. Mais on suppose ici la charge de l'axe ou de l'appui A, résultante du concours des puissances P, R,

être à chacune de ces puissances, comme le sinus de l'angle MEN est à chacun des sinus des angles AEN, AEM. Donc aussi la charge supposée de l'appui A, est ici à chacune de ces puissances P, R, comme la diagonale EF du parallélogramme GH est à chacun de ses côtes EG, EH, qui leur répondent sur leurs directions. Par conséquent ces deux puissances P, R, seront ici entr'elles comme ces mêmes côtes EG, EH; & (*princ. gener. Cor. 2.*) la force résultante de leur concours fera non seulement égale à cette charge, mais encore dirigée suivant EF qui passe (*Hyp.*) par l'appui A. Donc enfin (*part. 4. 5.*) il y aura ici équilibre entre ces deux puissances P, R, ainsi qu'on le vient d'avancer.

COROLLAIRE IX.

Puisqu'en cas d'équilibre dans toutes les Machines de ce Théoreme-ci, la charge de l'axe ou de l'appui A qui représente cet axe, résultante du concours d'action des puissances P, R, sur lui, est toujours (*part. 3.*) à chacune de ces puissances P, R, comme la diagonale EF du parallélogramme GH, est à chacun de ses côtes EG, EH, qui leur répondent sur leurs directions: le Lem. 9. fait voir que lorsque l'angle MEN, que font entr'elles les directions MP, NR, de ces deux puissances, est infiniment aigu, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 1.*) lorsque ces deux directions sont parallèles entr'elles; cette charge de l'appui A, est toujours égale à la somme $P + R$, de ces deux puissances, tant qu'elles agissent en même sens; ou seulement égale à leur différence $P - R$, tant qu'elles agissent en sens contraires. Les Corol. 1. 2. de ce Lem. 9. font pareillement voir que dans l'un & l'autre de ces deux cas cette charge de l'appui A est toujours alors dirigée parallèlement aux directions de ces deux puissances P, R; sçavoir, vers le même côté qu'elles dans le premier cas, & vers le côté de la plus forte d'entr'elles dans le second. Car,

1°. Lorsque l'angle MEN. est infiniment aigu, celui GEH du parallélogramme GH l'est aussi dans les Fig. 136. 138. 139. 140. du premier cas; & conséquemment aussi (Lem. 9. part. 1.) la diagonale du parallélogramme GH se trouve toujours égale en ce cas à la somme de ces côtes EG, EH. Donc suivant la part. 3. de ce Théoreme-ci, la charge de l'appui A, résultante du concours d'action des puissances P, R, sur cet appui, est aussi toujours égale à la somme $P+R$ de ces deux puissances dans ce cas des Fig. 136. 139. 140. 141. qui se réduisent alors aux Fig. 143. 145. dans lesquelles ces deux puissances P, R, de directions (Hyp.) parallèles entr'elles, agissent vers le même côté, où sont appliqués de différens côtes de l'appui A de la Machine: & cela conformément au Corol. 1. du Lem. 9. lequel Corol. 1. fait voir aussi que cette charge toujours dirigée (part. 3.) suivant la diagonale EF doit l'être alors de E vers A parallèlement aux directions P, R, vers le même côté qu'elles, comme dans les Fig. 143. 145.

Fig. 136.
138. 139.
140.

Fig. 143.
145.

2°. Tant que l'angle MEN compris entre les directions de ces deux puissances P, R, demeure infiniment aigu, celui GEH du parallélogramme GH des Fig. 135. 137. 141. 142. de l'autre cas, est au contraire (Déf. 11. Corollaire) infiniment obtus; & conséquemment (Lem. 9. part. 2.) la diagonale EF du parallélogramme GH est pour lors en ce cas égale seulement à la différence des côtes EG, EH, de ce parallélogramme. Donc suivant la part. 3. de ce Théoreme-ci, la charge de l'appui A, n'est alors égale qu'à la différence $P-R$ des puissances P, R, en ce cas des Fig. 135. 137. 141. 142. qui se réduisent alors aux Fig. 144. 146. dans lesquelles ces deux puissances de directions (Hyp.) parallèles entr'elles, agissent vers des côtes directement oppozés, ou sont d'un même côté de cet appui A: & cela conformément au Corol. 2. du Lem. 9. lequel Corol. 2 fait voir aussi que cette charge toujours dirigée (part. 3.) suivant la diagonale EF, doit l'être alors de A vers E parallèlement aux directions de ces deux

Fig. 135.
137. 141.
142.

Fig. 144.
146.

puissances P, R , & vers le côté où tend la plus forte P d'entr'elles, comme dans les Fig. 144. 146.

COROLLAIRE X.

Fig. 135.
& suivantes
jusqu'à 142.

Tout cela suit encore du Corol. 3. joint au Lem. 9. & à ses Corol. 1. 2. sçavoir, qu'en cas d'équilibre ici entre les puissances P, R , & de l'angle MEN infiniment aigu, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 1.*) de leurs directions paralleles entr'elles; non seulement la charge de l'appui A est toujours égale à la somme $P+R$ de ces deux puissances, tant qu'elles agissent ensemble en même sens; ou seulement égale à leur difference $P-R$, si elles agissent en sens contraires, mais encore que cette charge de l'appui A est toujours dirigée parallelement aux directions de ces deux puissances vers le même côté qu'elles dans le premier cas, & vers le côté où tend la plus forte d'entr'elles dans le second. Car,

Fig. 136.
138. 139.
140.

1°. Lorsque l'angle MEN est infiniment aigu, la part. 1. du Lem. 9. fait voir que le sinus de cet angle total MEN dans les Fig. 136. 138. 139. 140. du premier cas, est égal à la somme des sinus des angles partiels AEN, AEM . Donc (*Corol. 3.*) la charge de l'appui A est aussi toujours alors égale en ce premier cas à la somme $P+R$ des puissances P, R , du concours d'action desquelles (*part. 2. 3.*) il est chargé; & cette charge toujours dirigée (*part. 2. 3.*) suivant EF , le fera pour lors de E vers A dans les Fig. 144. 146. de la presente hypothese, vers le même côté où ces deux puissances tendent, & (*Lem. 9. Corol. 1.*) parallelement à leurs directions, ainsi que dans le nomb. 1. du Corol. 9.

Fig. 144.
146.

Fig. 135.
137. 141.
142.

2°. Lorsque l'angle MEN devient infiniment aigu par l'éloignement infini de son sommet E , l'angle AEN le devenant aussi pour lors, le Corol. 2. du Lem. 9. fait voir que le sinus du premier MEN de ces deux angles, partiel de l'autre AEN dans les Fig. 135. 137. 141. 142. du second cas, n'est alors égal qu'à la difference dont le sinus de cet angle total AEN surpasse le sinus de son au-

tre partial AEM. Donc (*Corol. 3.*) la charge de l'appui A n'est non plus alors en ce second cas, qu'égale à la différence $P - R$, dont le poids ou la puissance P surpasse la puissance R : & cette charge, toujours dirigée (*part. 2. 3.*) suivant EF, le fera pour lors de A vers E dans les Figures 144. 146. de cette hypothèse-ci en même sens que la plus forte P de ces deux puissances, pour lors directement contraire à l'autre R , & (*Lem. 9. Corol. 2.*) parallèlement à leurs directions, ainsi que dans le nomb. 2. du *Corol. 9.*

FIG. 144.
146.

La même chose se peut encore démontrer autrement. Car si dans ce second cas d'équilibre l'angle MEN est infiniment aigu, & conséquemment aussi AEM, ou son égal FEG, le complément GEH du premier étant alors (*Déf. 11. Corollaire*) infiniment obtus avec un partial FEG infiniment aigu ; le *Corol. 2.* du *Lem. 7.* fait voir que le sinus de cet angle total GEH ne sera pour lors qu'égal à la différence des sinus de ses angles partiels FEH, FEG ; & par conséquent (à cause de FEH = EFG, & de EGF complément de GEH à deux droits) le sinus de l'angle EGF ne sera non plus alors qu'égal à la différence des sinus des angles EFG, FEG. Donc (*Corol. 3.*) la charge de l'appui A ne sera encore ici égale qu'à la différence $P - R$ des deux puissances P , R , & dirigée (*part. 2. 3. & Lem. 9. Corol. 2.*) de A vers E dans le sens de la plus forte P d'entr'elles, parallèlement à leurs directions, ainsi qu'on le vient de voir dans les Fig. 144. 146.

FIG. 135.
137. 141.
142.

COROLLAIRE XI.

La charge de l'appui A, résultante du concours d'action des puissances P , R , en équilibre (*Hyp.*) entr'elles, étant toujours alors (*part. 3.*) à chacune d'elles, comme la diagonale EF du parallélogramme GH est à chacun de ses côtes EG, EH, pris sur leurs directions, & cette diagonale devenant (quoiqu'en raison différente) d'autant plus grande dans le cas des Fig. 136. 138. 139. 140. &

FIG. 135)
& suivantes
jusqu'à
142.

Nnij

d'autant plus petite dans celui des Figures 135. 137. 141. 142. que l'angle MEN est plus aigu; il suit manifestement que cette charge de l'appui A, sera aussi d'autant plus grande dans le premier cas, & d'autant plus petite dans le second, que cet angle MEN sera plus aigu. Donc cet angle ne pouvant jamais être plus aigu que lorsqu'il l'est infiniment, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 1.*) que lorsque les directions des puissances P, R, sont parallèles entr'elles; & la charge de l'appui A, résultante du concours de ces puissances, n'étant pourtant alors (*Corol. 9. 10.*) égale qu'à leur somme $P+R$ dans le premier cas, & qu'à leur différence $P-R$ dans le second: il suit encore évidemment que cette charge de l'appui A, ne peut jamais être plus grande que la somme de ces deux puissances P, R, dans le premier cas, ni plus petite que leur différence dans le second.

COROLLAIRE XII.

Par conséquent tant que les directions des deux puissances P, R, ne seront point parallèles, quel qu'angle fini qu'elles fassent entr'elles, la charge de l'appui A résultante du concours d'action de ces deux puissances, sera toujours moindre que leur somme dans le cas des Fig. 136. 138. 139. 140. & toujours plus grande que leur différence dans celui des Fig. 135. 137. 141. 142. sans pourtant que cette charge de l'appui A puisse jamais devenir égale à la somme de ces deux puissances dans le second cas: de sorte que tant que les directions de ces deux puissances P, R, sont entr'elles quel qu'angle fini, la charge de l'appui A, résultante de leur concours d'action sur lui, est toujours moindre que la somme de ces deux puissances dans l'un & l'autre des cas précédens, & dans toutes les Machines de ce Théoreme-ci.

Tout cela suit encore immédiatement de la part. 3. la diagonale EF du parallélogramme GH, se trouvant toujours moindre que la somme de ses côtes EG, EH, tant qu'ils font quel qu'angle fini entr'eux, quoi qu'elle devien-

ne d'autant plus grande que l'angle GEH devient plus aigu.

C O R O L L A I R E XIII.

Il est visible dans le Tour que la puissance R supposée ici en équilibre avec le poids P, pourroit se mouvoir de maniere, en desentortillant ou en entortillant sa corde autour de la roue BNB, que son point N d'application à cette roue, passeroit du côté de M dans les Fig. 136. 138. ou du côté opposé à M dans les Fig. 135. 137. de maniere, dis-je, qu'alors le cas des deux premieres de ces quatre Figures se changeroit en celui des deux autres, & reciproquement celui de ces deux autres Figures, en celui des deux premieres : & cela (*Corol. 5.*) sans que l'équilibre supposé entre les puissances P, R, cessât jamais ; puisque l'on y auroit toujours $P. R :: AN. AM.$ ainsi (*Corol. 1.*) que dans cet équilibre supposé.

Il est aussi visible dans le Treüil ou le Vindas, que la puissance R passant d'un côté à l'opposé par rapport à l'appui A, à la même distance AN, duquel elle fût encore appliquée ; le cas des Fig. 139. 140. se changeroit en celui des Fig. 141. 142. & reciproquement : & cela encore (*Corol. 6.*) sans que l'équilibre supposé entre cette puissance & le poids P, cessât ; puisque l'on y auroit encore (*Hyp.*) $P. R :: AN. AM.$ ainsi (*Corol. 1.*) que dans cet équilibre supposé.

Or (*Corol. 11.*) la charge de l'axe ou appui A, résultante du concours de ces puissances P, R, ne peut jamais être plus grande que la somme de ces puissances dans le premier cas exprimé par les Fig. 136. 138. 139. 140. ni plus petite que leur difference dans le second exprimé par les Fig. 135. 137. 141. 142. Donc la charge de l'axe ou appui A du Tour, & du Treüil ou du Vindas, résultante du concours d'action des puissances P, R, qu'on y vient de supposer en équilibre, & toujours ensuite appliquées chacune à même distance que d'abord de cet appui, de quelque côté que ce soit, & conséquem-

FIG. 135.
136. 137.
138.

FIG. 139.
140. 141.
142.

FIG. 135.
& suivantes
jusqu'à
142.

ment (*Corol. 1. 6.*) toujours en équilibre entr'elles, ne peut jamais être plus grande que la somme de ces deux puissances, ni plus petite que leur différence, en quelque variété de points de ces Machines que ces deux puissances soient successivement appliquées, toujours chacune à même distance de l'appui A, pour y conserver (*Corol. 1. 6.*) l'équilibre entr'elles.

Voilà jusqu'ici pour ce qui concerne l'équilibre des puissances P, R, sur les Machines dont il s'agit ici. Voici aussi quelque chose qui en résulte pour le cas même où ces puissances n'y seroient pas en équilibre entr'elles, & seulement pour le besoin que nous en aurons dans la suite.

COROLLAIRE XIV.

Puisque le cas d'équilibre entre les puissances P, R, doit donner ici (*Corol. 1.*) $P.R. :: AN.AM.$ ou (*Corol. 2.*) P à R, comme le sinus de l'angle AEN au sinus de l'angle AEM; il est manifeste que lorsqu'une de ces puissances est plus grande qu'il ne faut pour avoir ce rapport à l'autre, elle doit (*Ax. 5.*) l'emporter sur elle: puisqu'alors elle seroit plus grande qu'il ne faudroit (*Corol. 1. & 7.*) pour faire équilibre ici avec elle.

COROLLAIRE XV.

Reciproquement si une de ces deux puissances P, R, l'emporte ici sur l'autre, étant alors plus grande qu'il ne faudroit pour faire équilibre avec elle, leurs directions demeurant les mêmes; elle fera aussi pour lors à l'autre en plus grande raison que la requise pour cet équilibre, laquelle est (*Corol. 1.*) de $P.R. :: AN.AM.$ ou (*Corol. 2.*) de P à R, comme le sinus de l'angle AEN est au sinus de l'angle AEM. Donc alors, si c'est la puissance ou le poids P qui l'emporte sur la puissance R, l'on aura P à R en plus grande raison que AN à AM, ou que le sinus de l'angle AEN au sinus de l'angle AEM. Pareillement si c'est la puissance R qui l'emporte sur le poids P, l'on aura de même R à P en plus grande raison que AM à

AN, ou que le sinus de l'angle AEM au sinus de l'angle AEN.

C O R O L L A I R E X V I.

De plus lorsqu'une des deux puissances P, R, l'emportera ici sur l'autre, la direction de la force résultante (*Lem. 3. Corol. 1.*) de leur concours, ne passera point (*princip. gener. Cor. 1.*) par l'axe ou l'appui A, mais entre cet appui & la direction de celle des deux puissances qui l'emportera sur l'autre. Car puisque (*Lem. 3. Cor. 6.*) ces deux puissances P, R, n'agissent ensemble que de cette force résultante de leur concours sur chacune des Machines dont il s'agit, & de même que feroit cette force seule; il est visible (*princip. gener. Cor. 1.*) que la direction de cette force résultante du concours de ces deux puissances P, R, doit passer du côté de celle des deux qui l'emportera sur l'autre, entre l'appui A, & la direction de cette puissance prédominante.

S C H O L I E.

Il suit de tout ce qui précède, que dans le Tour, en cas d'équilibre entre les puissances P, R, qui y sont appliquées, la variété des directions de ces deux puissances, y varie toujours (*Corol. 8. 9. 10. 11. 12. 13.*) la charge de l'appui A, résultante du concours d'action de ces deux puissances sur lui; mais qu'elle n'y varie jamais (*Cor. 4.*) le rapport de ces puissances entr'elles; & qu'ainsi la considération de leurs directions est tout-à-fait inutile dans la recherche de ce rapport. C'est pour cela que dans la suite, pour avoir ce rapport entre deux puissances en équilibre entr'elles sur tel nombre de *Tours* à la fois qu'on voudra, nous ne nous mettrons plus en peine des angles que les directions de ces deux puissances y pourroient faire ou ne pas faire entr'elles, mais seulement des rayons ou des diamètres des rouleaux & des roues de toutes ces Machines.

THEOREME XX.

FIG. 147.
148.

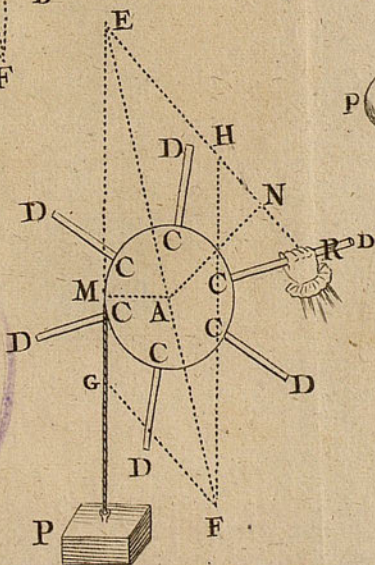
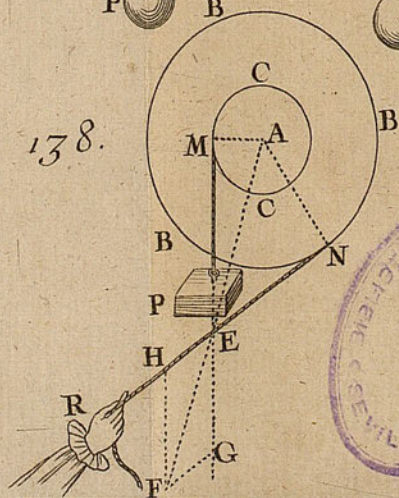
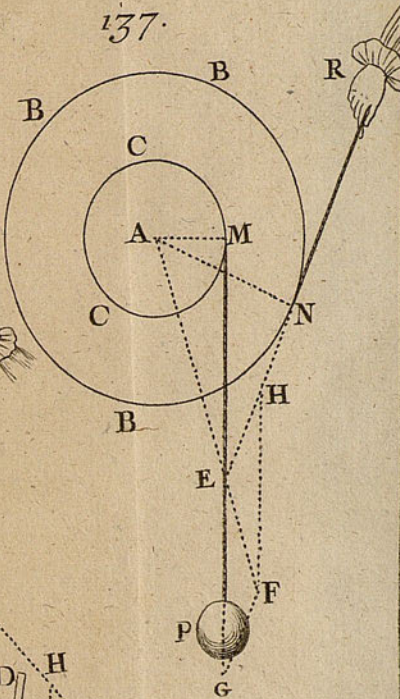
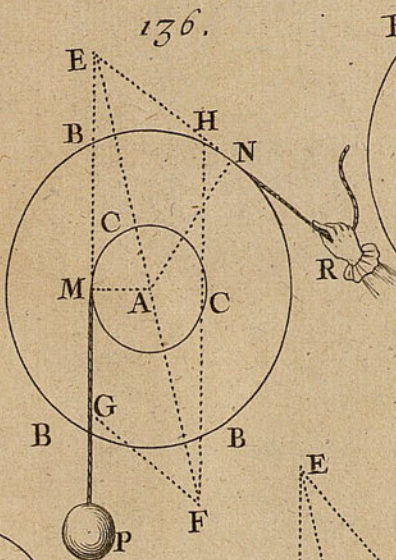
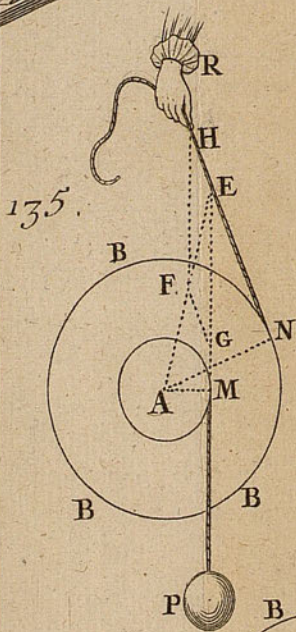
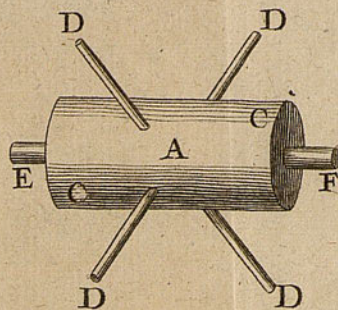
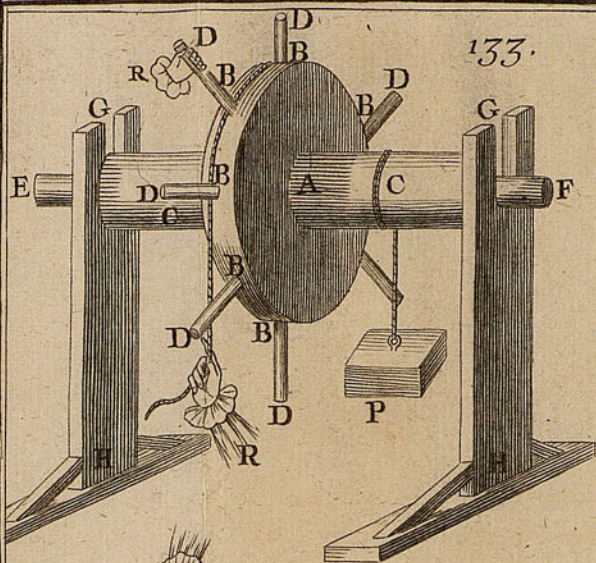
Soient plusieurs Tours AMD , BNE , COF , &c. mobiles autour de leurs centres fixes A , B , C , &c. soient autant de cordes DD , EE , FR , &c. roulées sur les royes ou tambours MD , EN , OF , &c. de ces Machines, de maniere que la corde DD roulée sur le tambour DM suivant MD , le puisse être sur le rouleau ou cylindre KD suivant DK ; que telle EE qui l'est sur le tambour EN suivant NE , le puisse être aussi sur le rouleau LE suivant EL ; & par tout de même jusqu'au dernier Tour COF sur la roue FO duquel soit aussi la corde FR , roulée suivant OF : à l'extrémité R de cette corde FR soit une puissance R , qui par le moyen de toutes ces Machines ou de tous ces Tours ainsi équipéz, agisse contre le poids ou la puissance P appliquée à une autre corde GP , qui se puisse rouler ou filer suivant GH . Cela posé, quelques soient les directions GP , DD , EE , FR , des cordes, je dis,

I. Qu'en cas d'équilibre ici entre les puissances P , R , la puissance R sera à la puissance ou poids P , comme le produit des rayons de tous les rouleaux est au produit des rayons de toutes les roues, ou (ce qui revient au même) comme l'unité est à la fraction résultante du second de ces produits, divisé par le premier, quelques soient les directions de ces puissances P , R .

II. Reciproquement si les puissances P , R , sont entr'elles en ce rapport, elles seront ici en équilibre entr'elles, quelques en soient encore les directions.

DEMONSTRATION.

PART. I. En ce cas d'équilibre supposé les deux forces dont chacun des cordons DD , EE , &c. est directement tiré en sens contraires, étant (*AX. 5.*) égales entr'elles, soient appelez D chacune des deux dont le cordon DD est ainsi tiré; E , chacune des deux dont le cordon EE est aussi tiré directement en sens contraires, &c. Cela posé, si des appuis ou centres fixes A , B , C , &c. par les points G , D , D , E , E , F , &c. où les rouleaux & les roues sont touchées par les parties droites des cordes, on imagine les rayons AG , AD , BD , BE , CE , CF , &c. de ces rouleaux



& de ces roues ; le Corol. 1. & le nomb. 2. du Corol. 3. du Th. 19. donneront ici chacun

R. E :: CE. CF. sur le Tour COF ;

E. D :: BD. BE. sur le Tour BNE ;

D. P :: AG. AD. sur le Tour AMD,

&c.

Donc (en multipliant par ordre) l'on aura ici R. P :

$$AG \times BD \times CE \times \&c. AD \times BE \times CF \times \&c. :: 1. \frac{AD \times BE \times CF \times \&c.}{AG \times BD \times CE \times \&c.}$$

&c. C'est-à-dire , la puissance R au poids P, comme le produit des rayons de tout ce qu'il y a ici de rouleaux , est au produit des rayons de toutes leurs roues , ou comme l'unité est à la fraction faite du second de ces produits, divisé par le premier. *Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.*

PART. II. Je dis presentement que si les puissances P, R, appliquées comme ci-dessus , sont entr'elles en cette raison , elles demeureront ici en équilibre entr'elles. Car si elles n'y demeuroident pas , & qu'une des deux , par exemple , R, l'emportât sur P ; il est visible qu'alors cette puissance R l'emporterait sur E dans le Tour COF, E sur D dans le Tour BNE, D sur P dans le Tour AMD, &c. & conséquemment qu'alors (*Th. 19. Cor. 15.*) on auroit

R. E > CE. CF. dans le Tour COF ;

E. D > BD. BE. dans le Tour BNE ;

D. P > AG. AD. dans le Tour AMD,

&c.

Donc (en multipliant par ordre) l'on auroit aussi pour lors R. P > AG × BD × CE × &c. AD × BE × CF × &c. c'est-à-dire, qu'alors la puissance R seroit au poids P en plus grande raison que le produit des rayons des rouleaux au produit des rayons des roues ; ce qui est contre l'hypothese. Si au contraire on vouloit que ce fût P qui l'emportât sur R, on trouveroit de même R à P en moindre raison que le premier de ces deux produits au second ; ce qui est encore contre l'hypothese. Donc aucune de ces deux puis-

sances ne l'emportera ici sur l'autre, & par conséquent elles y demeureront en équilibre entr'elles tant que la première R sera à la seconde P, comme le produit des rayons de tout ce qu'il y a ici de rouleaux, est au produit des rayons de toutes leurs roues. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

Autrement. Si les deux puissances R, P, supposées entr'elles en ce rapport, ne demeueroient pas ici en équilibre entr'elles, soit à la place de R. quelqu'autre puissance S qui y demeurât en équilibre avec la puissance ou le poids P. La part. 1. donneroit alors S à P, comme le produit des rayons de tout ce qu'il y a ici de rouleaux, est au produit des rayons de toutes leurs roues. Mais telle est aussi (Hyp.) la raison de R à P. Donc on auroit ici $S=R$; & par conséquent cette nouvelle puissance S y demeurant (Hyp.) en équilibre avec le poids P, la puissance R y demeureroit aussi (Ax. 2.) en équilibre avec ce même poids P. *Ce qu'il falloit encore 2°. démontrer.*

C O R O L L A I R E I.

Cette part. 2. jointe au Corol. 1. & au nomb. 2. du Corol. du Th. 19. fait voir que lorsqu'on aura ici $R. P :: AG \times BD \times CE \times \&c. AD \times BE \times CF \times \&c.$ l'on y aura toujours aussi, 1°. $R. E :: CE. CF.$ 2°. $E. D :: BD. BE.$ 3°. $D. P :: AG. AD.$ 4°. &c. Car puisque ce rapport de R à P rend ici (part. 2.) ces deux puissances R, P, en équilibre entre-elles, & que cet équilibre ne peut être sans ceux de R avec E, de E avec D, de D avec P, &c. Ce rapport de R à P ne peut être non plus, suivant le Corol. 1. & le nomb. 2. du Corol. 3. du Th. 19. sans qu'il y ait, 1°. $R. E :: CE. CF.$ 2°. $E. D :: BD. BE.$ 3°. $D. P :: AG. AD.$ 4°. &c. ainsi qu'on le vient d'avancer.

C O R O L L A I R E II.

FIG. 147.
148. 149. Les longueurs des cordons DD, EE, &c. supposez sans pesanteur, ne servant ici (Fig. 147. 148.) qu'à la communication d'action des puissances P, R, d'un Tour à

l'autre immédiatement suivant depuis le premier jusqu'au dernier ; & cette communication d'action y devant toujours être la même , quelques soient ces longueurs DD , EE, &c. il est visible que quand elles deviendroient nulles , & que les points D, D, E, E, &c. se confondroient en un deux à deux de même nom, ainsi que dans la Fig. 149. dans laquelle la roue MD touche en D le rouleau DK , & la roue NE touche en E le rouleau FL ; cette communication d'action des puissances P, R, subsisteroit encore la même de chacune de ces Machines à sa voisine par le moyen des restes de cordes NDK , NEL , &c. roulées suivant l'ordre de ces lettres sur leurs roues & rouleaux ; & qu'ainsi tout ce qu'on vient de voir dans les Fig. 147. 148. doit pareillement être vrai dans la Fig. 149. Donc,

1°. En cas d'équilibre entre les puissances P, R, sur les Tours qui se toucheroient comme dans cette Fig. 149. l'on auroit en general (*part. 1.*) $R. P :: AG \times BD \times CE \text{ \&c.}$

$AD \times BE \times CF \text{ \&c.}$ ou $R. P :: 1. \frac{AD \times BE \times CF}{AG \times BD \times CE} \text{ \&c.}$

2°. Reciproquement si les puissances P, R, sont entre-elles en ce rapport dans cette même Fig. 149. il y aura pour lors (*part. 2.*) équilibre entr'elles.

COROLLAIRE III.

Au lieu des cordes MDK , NEL , roulées sur les roues MD , NE , & sur les rouleaux DK , EL , qui les touchent dans la Fig. 149. si l'on imagine que ces roues soient dentées , que les bandes circulaires qu'elles touchent de ces rouleaux , soient aussi dentées en pignons engrenés avec elles , ainsi que dans la Fig. 150. dans laquelle la puissance R à un des bras CQ de Treuil , ou Vindas , ou de Manivelle , lequel en cas de mouvement fût décrire au point F de la perpendiculaire CF à la direction RF de cette puissance , un cercle OF tel que la roue OF de la Fig. 149. lui auroit fait décrire si cette puissance y eût été appliquée en F : alors voyant que l'action de cette puissance R

est la même dans la Fig. 150. sur le bras CF, & sur le pignon EL, que sur la roue OF & sur le rouleau EL de la Fig. 149. voyant de plus que l'effort de ce pignon EL sur la roue EN, par l'engrenement de leurs dents, se fait suivant les touchantes communes en E dans la Fig. 150. comme celui du rouleau EL sur la roue EN par le moyen de la corde NEL roulée sur l'un & sur l'autre dans la Fig. 149. & ainsi de l'effort fait en D dans chacune de ces deux Fig. 149. 150. On verra que dans celle-ci comme dans l'autre,

Fig. 150.

1°. En cas d'équilibre entre les puissances P, R, sur le rouage de la Fig. 150. il doit y avoir encore en general (Corol. 2. nomb. 1.) $R. P :: AG \times BD \times CE \times \&c. AD \times BE \times$

$$CF \times \&c. \text{ ou } R. P :: 1. \frac{AD \times BE \times CF \times \&c.}{AG \times BD \times CE \times}$$

2°. Reciproquement si les puissances R, P, sont entre-elles en ce rapport sur le rouage de la Fig. 150. il y aura pour lors (Corol. 2. nomb. 2.) (équilibre entr'elles.

COROLLAIRE IV.

Fig. 147.
148. 149.
150.

Si dans la Fig. 150. on regarde la puissance R appliquée au bras CQ d'un Treuil ou Vindas, ou d'une Manivelle, comme si elle étoit appliquée au point F d'une roue OF décrite du rayon CF perpendiculaire à la direction RF de cette puissance R, de même qu'elle l'est au point F du tambour OF dans les Fig. 147. 148. 149. & que pour nous exprimer plus universellement, on prenne cette roue OF imaginée dans la Fig. 150. pour celle d'un Tour substitué à la place de ce Treuil ou Vindas, ou de cette Manivelle: il suit de tout ce qui précède (excepté du Corol. 1.) que de quelque nombre de Tours que soient faites les Machines entieres des Fig. 147. 148. 149. 150.

1°. En cas d'équilibre entre les deux puissances P, R, dont la premiere P soit appliquée au rouleau du premier Tour, & la seconde R à la roue du dernier; la premie-

re P de ces deux puissances fera par tout ici à la seconde R, comme le produit des rayons de toutes les roues, sera au produit des rayons de tous leurs rouleaux ou pignons.

2°. Réciproquement si ces deux puissances ainsi appliquées à ces Machines, sont entr'elles en cette raison, elles y seront en équilibre entr'elles.

C O R O L L A I R E V.

Si l'on prend n pour le nombre de ce qu'il y a de *Tours* dans chacune de ces Machines entieres des Fig. 147. 148. 149. 150. & que le rayon de la roue de chacun de ces Tours soit dans tous en même raison quelconque au rayon de son rouleau ou pignon, en sorte qu'on ait partout ici $AD. AG :: BE. BD :: CF. CE ::$ &c. l'on y aura aussi pour lors.

$$1^{\circ}. AD. AG :: AD. AG.$$

$$2^{\circ}. AD. AG :: BE. BD.$$

$$3^{\circ}. AD. AG :: CF. CE.$$

$$n^{\circ} \quad \&c.$$

Donc (en multipliant par ordre) l'on y aura pareillement $\overline{AD}^n \overline{AG}^n :: AD \times BE \times CF \times \&c. AG \times BD \times CE \times \&c.$ Or on vient de voir en general dans tout ce qui précède, excepté dans le Corol. 1. que le cas d'équilibre entre les puissances P, R, sur chacune des Machines dont il s'agit ici, y donne toujours $P. R :: AD \times BE \times CF \times \&c. AG \times BD \times CE \times \&c.$ Et reciproquement que lorsque ces puissances sont entr'elles en ce rapport, elles y sont en équilibre entr'elles. Donc en ce cas-ci des rayons des roues par tout en même raison aux rayons de leurs rouleaux ou pignons,

1°. Si les puissances P, R, y sont en équilibre entr'elles, l'on y aura toujours $P. R :: \overline{AD}^n \overline{AG}^n (Hyp.) :: \overline{BE}^n \overline{BD}^n (Hyp.) :: \overline{CF}^n \overline{CE}^n :: \&c.$

2°. Réciproquement si ces deux puissances P, R, sont

entr'elles en cette raison dans ce cas-ci, elles y seront en équilibre entr'elles.

COROLLAIRE VI.

Si l'on prend r à 1 dans la raison quelconque du rayon de la roue de chaque *Tour* au rayon de son rouleau ou pignon, supposée encore ici la même dans tous ; l'on y aura $r. 1 :: AD. AG :: BE. BD :: CF. CE :: \&c.$ Et conséquemment $AD = r \times AG$, $BE = r \times BD$, $CF = r \times CE$, &c. Donc en substituant ces valeurs de AD , BE , CF , &c. en leurs places dans le nomb. 1. du Corol. 5.

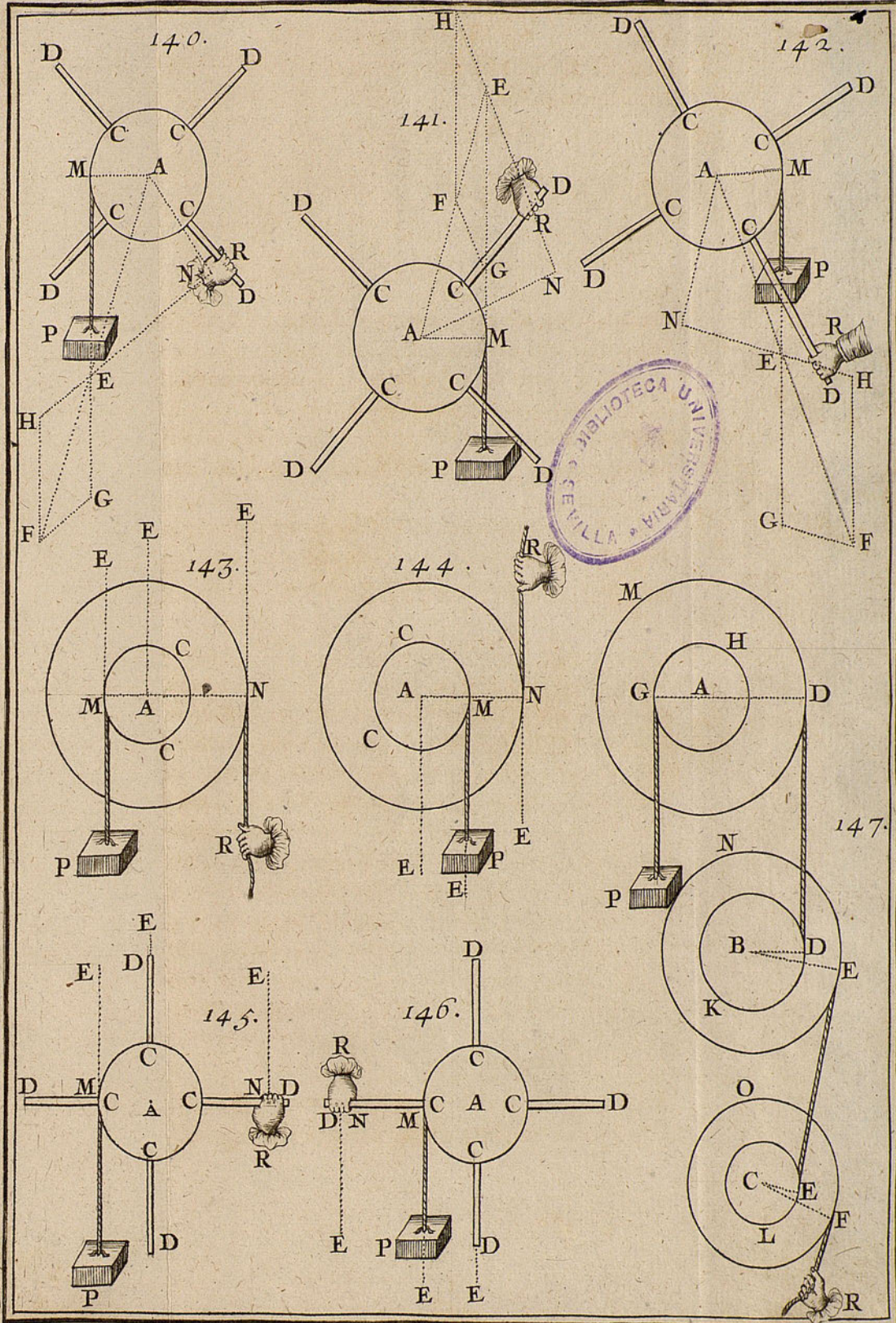
1°. Ce nomb. 1. du Corol. 5. donnera pour ici $P. R :: \frac{r \times AG}{AG} :: \frac{r \times BD}{BD} :: \frac{r \times CE}{CE} :: \&c.$ c'est-à-dire, par tout ici $P. R :: r^n. 1.$ en cas d'équilibre entre ces puissances P, R .

2°. Reciproquement le nomb. 2. du même Corol. 5. fera voir que ces puissances P, R , seront ici en équilibre entr'elles, tant qu'il y aura $P. R :: r^n. 1.$

COROLLAIRE VII.

Fig. 150.
151. 152.

Si la Machine vûe de front dans la Fig. 150. est regardée de côté comme dans la Fig. 151. dont les axes AA, BB, CC , &c. sont representez par A, B, C , &c. dans la Fig. 150. si de plus au lieu des pignons de cette Machine ainsi vûe de côté dans la Fig. 151. on y imagine des lanternes comme dans la Fig. 152. entre les fuseaux desquelles les dents des roues s'engrennent comme entre les dents des pignons des Fig. 150. 151. si enfin l'on suppose dans les Machines des Fig. 151. 152. que les rayons AD, BE, CF , des roues, & ceux AG, BD, CE , &c. des pignons ou des lanternes, y soient perpendiculaires à leurs axes AA, BB, CC , &c. comme dans la Fig. 150. en comprenant encore ici (pour abréger nos expressions) le cercle OF sous le nom de *Roue*, & le rouleau de la roue MD sous le nom de *Pignon* : on verra dans les Fig. 151. 152. comme dans la Fig. 150.



I. Qu'en general pour tous les rouages, quels qu'y soit le nombre des roues & des pignons ou des lanternes, & les rapports de leurs rayons.

1°. Le nomb. 1. des Corol. 3. 4. y donnera $P.R. :: AD \times BE \times CF \times \&c. AG \times BD \times CE \times \&c.$ tant que les puissances P, R , y seront en équilibre entr'elles.

2°. Et le nomb. 2. des mêmes Corol. 3. 4. fera reciproquement voir que ces puissances P, R , y étant entre-elles dans ce rapport, il y aura toujours équilibre entr'elles.

II. Si n est le nombre de ce qu'il y a de roues dans ces Machines, & que ce rayon de chaque roue y soit par tout à celui de son pignon ou de sa lanterne: $r. 1.$ quelque soit ce rapport supposé par tout le même.

1°. Le nomb. 1. du Corol. 6. donnera toujours ici $P.R. :: r^n. 1.$ tant que ces puissances P, R , y seront en équilibre entr'elles.

2°. Et reciproquement le nomb. 2. du même Corol. 6. les y fera voir en équilibre tant qu'elles y seront en ce rapport entr'elles.

COROLLAIRE VIII.

Puisque par tout ce qui précède (excepté par le Cor. I.) en cas d'équilibre entre les deux puissances P, R , sur chacune des Machines des Fig. 147. 148. 149. 150. 151. 152. la puissance ou le poids P est toujours à la puissance R , comme le produit des rayons des tambours ou des roues de tous les *Tours* qui composent chacune de ces Machines entieres, est au produit des rayons de tous leurs rouleaux ou pignons, ou lanternes; il est visible que le rayon du tambour ou de la roue de chaque *Tour* étant toujours plus grand que le rayon de son rouleau, ou de son pignon, ou de sa lanterne, il faudra d'autant moins de force à la puissance R pour faire équilibre avec le poids P sur la Machine où ces deux puissances seront appliquées comme cideffus, que cette Machine sera faite d'un plus grand nombre de *Tours*, & que le rayon du tambour ou de la roue de chaque *Tour* y sera plus grand par rapport au rayon de son rouleau ou de son pignon, ou de sa lanterne.

FIG. 147.
& suivantes
jusqu'à 152.

Par exemple, si les roues des *Tours* de chacune de ces Machines, sont toutes de rayons en même raison quelconque de r à 1, aux rayons de leurs rouleaux ou pignons ou lanternes, comme dans le Corol. 6. & dans l'art. 2. du Corol. 7. si de plus n exprime le nombre des *Tours* dont chacune de ces Machines est composée, comme dans les Corol. 5. 6. & 7. art. 2. les nomb. 1. du Corol. 6. & de l'art. 2. du Corol. 7. donnant pour ce cas-ci $P. R. :: r^n. 1.$ lorsque les puissances P, R , sont en équilibre entr'elles sur les Machines des Fig. 147. 148. 149. 150. 151. 152. On voit que plus le nombre n de leurs *Tours* sera grand, & plus sera grand aussi le rapport $\frac{r}{1}$ du rayon de chacune de leurs roues ou tambours, au rayon de son rouleau ou pignon ou lanterne; plus au contraire la puissance R devra être petite pour y faire équilibre avec un même poids P : en voici quelques exemples.

Le cas particulier des Fig. 147. 148. 149. 150. 151. 152. où il n'y a que trois roues (en y prenant pour une roue le cercle OF du Treüil, du Vindas, ou de la Manivelle, dans les Fig. 150. 151. 152.) chacune d'un rayon appelé r , & trois rouleaux (en y comprenant aussi les pignons & les lanternes) supposez chacun d'un rayon $= 1$. par rapport au rayon (r) de sa roue: ce cas, dis-je, ayant ainsi $n=3$, la précédente analogie generale $R. P. :: 1. r^n.$ s'y réduira à $R. P. :: 1. r^3.$ D'où l'on voit qu'en cas d'équilibre l'on y auroit,

1°. $R. P. :: 1. 125.$ si $r=5$: c'est-à-dire, qu'alors une livre de force en soutiendrait ici 125.

2°. $R. P. :: 1. 216.$ si $r=6$: c'est-à-dire, qu'alors une livre de force en soutiendrait 216.

3°. $R. P. :: 1. 343.$ si $r=7$: c'est-à-dire, qu'alors une livre de force en soutiendrait 343.

4°. $R. P. :: 1. 512.$ si $r=8$: c'est-à-dire, qu'alors une livre de force en soutiendrait 512.

5°. $R. P. :: 1. 729.$ si $r=9$: c'est-à-dire, qu'alors une livre de force en soutiendrait 729.

6°. R. P :: 1. 1000. si $r=10$: c'est-à-dire, qu'alors une livre de force soutiendrait un poids de 1000. livres.

Et ainsi de suite, selon que le rapport $\frac{r}{1}$ seroit plus grand.

Cette même puissance R d'une livre de force soutiendrait encore ici de bien plus grands poids P, si au lieu de trois *Tours*, il y en avoit ici davantage, & des poids d'autant plus grands qu'il y auroit plus de *Tours*, ou que le nombre *n* de ces *Tours* seroit plus grand.

De-là, & de tout ce qui précède, il suit qu'il n'y a point de poids si énorme, qu'on ne puisse faire soutenir à la moindre force ou puissance imaginable que ce soit, par le moyen de plusieurs *Tours* ajustez entr'eux comme dans les Fig. 147. 148. 149. 150. 151. 152. soit par la multiplication de ces *Tours*, soit par l'augmentation du rapport des rayons de leurs tambours ou roues aux rayons de leurs rouleaux ou pignons ou lanternes, soit enfin (pour faire davantage) par tous les deux ensemble.

S C H O L I E.

I. Telle est la raison de la force prodigieuse du Cric Fig. 151 de la Fig. 151. pour élever ou pour traîner toutes sortes de fardeaux P par le moyen de la Manivelle CRQ que la puissance R fait tourner ; je veux dire la raison de la prodigieuse petitesse de force R qu'il y faut employer pour élever ou traîner les fardeaux les plus lourds. Cette Machine est non seulement très-puissante, mais encore d'autant plus commode, qu'elle tient très-peu de place : elle en tient si peu, qu'on la peut cacher dans une boîte ou caisse fort petite, & par-là en rendre la force plus merveilleuse aux ignorans, qui sont effrayez de lui voir faire marcher des Chariots, traîner des Canons, &c. avec très-peu d'effort ou de peine de la part de celui qui la fait agir.

II. Les Mouffles peuvent aussi être logées dans de très-petits espaces ; mais il s'en faut bien qu'elles ne

soient aussi puissantes que le Criq : il leur faudroit bien des Poulies pour arriver à l'égaliser en force , quelque nombre de roues qu'il eût , & quelque petits que fussent les rapports des rayons de ses roues & de sa manivelle à ceux de son rouleau & de ses pignons. Puisque la moindre force requise pour soutenir un poids avec des Poulies ou des Moufles , doit être à ce poids (*Th. 17. Corol. 3. 4.*) comme l'unité est au double du nombre des Poulies mobiles , lorsqu'un des bouts de la corde est attaché à la Moufle fixe ; ou (*Th. 18. Corol. 3.*) comme l'unité est au double du nombre des Poulies mobiles , augmenté de cette unité , lorsque ce bout de la corde est attaché à la Moufle mobile , au lieu que dans le Criq la puissance R , pour être ainsi en équilibre avec le poids P , ne doit en general être à ce poids (*Corol. 7. art. 1. nomb. 1.*) que comme l'unité est à la fraction résultante du produit des rayons des roues & de la manivelle , divisé par le produit des rayons du rouleau & des pignons ; & seulement (*Corol. 7. art. 2. nomb. 1.*) comme le rayon du rouleau , ou d'un des pignons , pris pour l'unité , est au rayon d'une des roues ou de la manivelle , élevé à un degré , dont le nombre des roues (le cercle OF de la manivelle étant pris pour une roue) soit l'exposant , lorsque les rayons des roues & de la manivelle sont dans toutes en même raison aux rayons de leur rouleau & de leurs pignons , ainsi que dans le Corollaire 7. art. 2. Cela , dis-je , étant ainsi dans les Moufles & dans le Criq , une roue engrenée dans un pignon , pouvant seule avec lui (par la seule grandeur du rapport de son rayon à celui de son pignon) épargner plus de force dans l'usage du Criq , que plusieurs Poulies ensemble dans une Moufle ; la force du Criq entier doit être incomparablement plus grande que celle des Moufles , à pareil nombre de pieces , & même à beaucoup moins de pieces dans le Criq que dans les Moufles.

III. Cette raison fait voir que l'homme qu'on a vû dans les articles 2. des Scholies des Théoremes 17. 18.

pouvoir s'élever soi-même seul jusqu'à la hauteur, par exemple, de la voûte d'une Eglise, par le moyen des Mouffes, pourroit s'y élever aussi seul, & beaucoup plus aisément par le moyen du Criq attaché ferme à un panier dans lequel cet homme feroit, à l'aide d'une corde attachée par un bout à cette voûte, & par l'autre à la circonference du rouleau de ce Criq: cette corde se filant autour de ce rouleau à mesure que cet homme feroit tourner la manivelle de cette Machine, elle enleveroit ainsi cet homme avec la Machine & le panier si haut qu'il voudroit vers la voûte. Il est encore à remarquer que quelque aisément que cet homme se puisse ainsi enlever par le moyen d'un Criq, & d'autant plus aisément que ce Criq auroit plus de roues; le Corol. 7. du Th. 14. fait voir que ce même homme se pourroit enlever encore avec la moitié moins de force ou de peine, si la corde attachée au rouleau de cette Machine passoit par dessus une Poulie attachée à la voûte, d'où elle revînt s'attacher par son autre bout au panier.

IV. Afin que les roues des Fig. 150. 151. 152. puissent jouer librement, il est visible que leurs dents doivent être égales à celles des pignons dans lesquelles ces roues s'engrenent, & les entre-deux de ces dents aussi égaux de part & d'autre, je veux dire dans la roue & dans le pignon qui s'engrene avec elle; de sorte que le nombre des dents de cette roue doit être à celui des dents de ce pignon, comme la circonference de la roue à la circonference du pignon, ou (ce qui revient au même) comme le rayon de la roue au rayon du pignon. Il faut prendre garde que ces dents de roues & de pignons doivent être un peu arondies, pour empêcher, ou du moins pour diminuer l'opposition que leur rencontre perpendiculaire de l'une avec l'autre pourroit faire à leur mouvement. La figure qui leur convient pour cela se perfectionnera dans l'usage de la Machine, en se frottant & en s'usant les unes contre les autres.



SECTION V.

De toutes sortes de Leviers , de quelque figure , de quelque espece , & dans quelque situation qu'ils soient , & pour toutes les directions possibles des puissances , ou des poids qui y sont appliquez.

DEFINITION XXI.

FIG. 153.
& suivantes
jusqu'à 167.

LE *Levier* est une verge inflexible MN, de figure quelconque, considérée sans pesanteur, à laquelle on conçoit trois puissances E, F, H, appliquées en differens endroits X, O, B; ou deux puissances E, F, & un appui B, qui par sa résistance tient lieu de la troisième puissance H, & dont la charge est ce qu'il a à soutenir du concours d'action des deux autres, ou de tant d'autres puissances qu'on y pourroit supposer dirigées à volonté.

COROLLAIRE.

Quelque soit sur l'appui B d'un Levier quelconque la charge résultante du concours d'action de tant de puissances qu'on voudra, appliquées à volonté à ce Levier, & en équilibre entr'elles sur cet appui; la résistance qu'il y doit faire pour cet équilibre, doit être (Ax. 4.) égale & directement opposée à cette charge. Cet appui s'appelle d'ordinaire *Hypomochlion*, nom tiré du Grec, & fort en usage dans la Statique.

On ne met ici tant de figures de Leviers avec tant de directions différentes de puissances, que pour faire mieux sentir l'universalité du Théoreme suivant, dont la démonstration, aussi-bien que lui, va convenir également à chacun d'eux, & à tout ce qu'on en pourroit imaginer d'autres: & cela sans être obligé de passer (ainsi que l'on fait d'ordinaire) par le

Fig. 148.

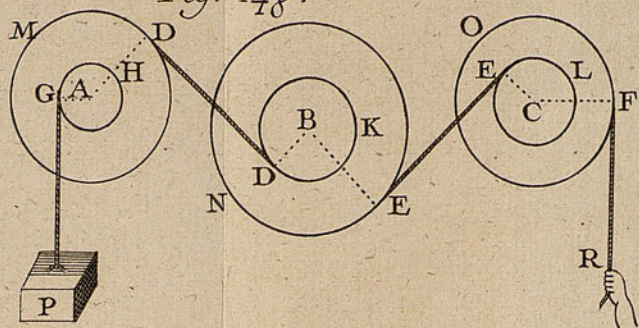


Fig. 149.

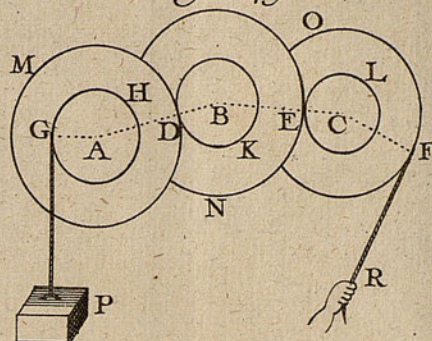


Fig. 150.

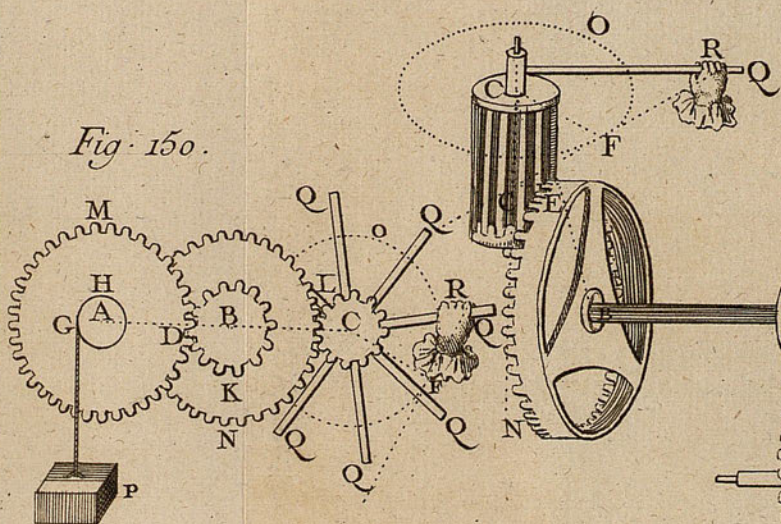


Fig. 152.

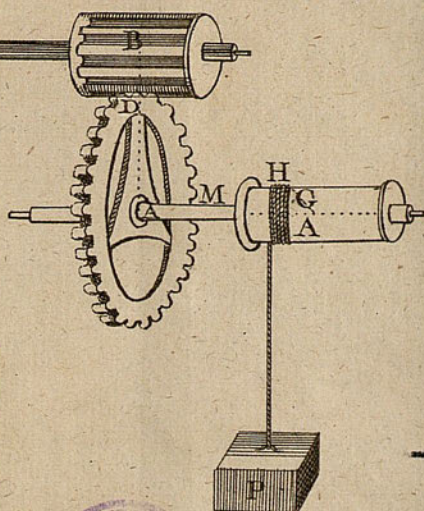
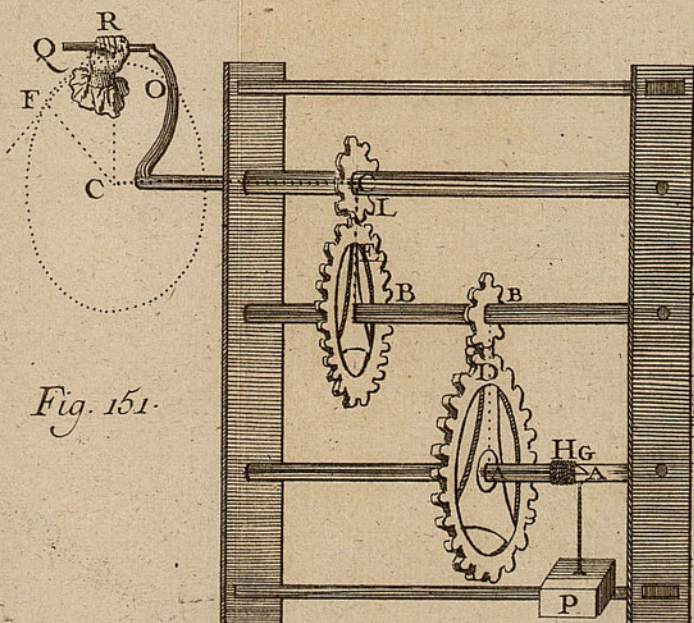


Fig. 151.



Levier droit posé sur un appui mis entre deux puissances de directions paralleles entr'elles , & perpendiculaires à ce Levier , pour arriver aux autres , ainsi (dis-je) qu'on le fait d'ordinaire par des suppositions qui , quoique vraies , ne sont pas assez évidentes pour être admises aussi gratuitement qu'on les fait.

S C H O L I E.

I. Au lieu de deux puissances & un appui , on considère d'ordinaire dans le Levier une puissance , un poids , & un appui , comme si la pesanteur d'un poids n'étoit pas une force semblable à celle d'une puissance qui lui seroit égale , & de même direction qu'elle. Cette seule variété d'expression a fait diviser le Levier en trois especes qu'on a soigneusement distinguées l'une de l'autre , comme si elles étoient différentes.

On appelle *Levier de la premiere espece* , celui dont l'appui est placé entre le poids & la puissance ; *Levier de la seconde espece* , celui dont le poids est entre la puissance & l'appui , & *Levier de la troisieme espece* , celui dont la puissance est entre le poids & l'appui.

Mais si à la place du poids & de l'appui on substitue suivant leurs directions deux puissances , dont une soit égale à la pesanteur du poids , & l'autre égale à la résistance de l'appui ; on verra toutes ces differences de Leviers disparoître , & se réduire toutes à celui de la précédente Déf. 21. auquel trois puissances sont appliquées en differens en troits , & de maniere qu'une quelconque d'entr'elles agisse toujours seule contre les deux autres. De-là s'évanouissent aussi , comme badines , toutes les questions faites par Aristote dans sa Mécanique , & par plusieurs autres après lui , sur les Rames , les Mats , & le Gouvernail d'un Vaisseau ; sçavoir , à quelle espece de Levier chacune de ces pieces doit se rapporter. Il n'y a qu'à prendre pour appui la puissance qui se trouve au point où chacun de ces Auteurs le veut , & pour puissance la résistance de l'appui , pour faire voir que toutes ces questions ne sont que de nom.

II. Ce qui a fait imaginer, ou du moins fort autorisé cette division de Leviers en plusieurs especes, a peut-être été le défaut d'une démonstration generale, qui convînt à toutes ces prétendues especes à la fois. Tout ce que j'en ai vu de différentes de celle qui se trouve dans le Projet de ceci, publié en 1687. n'est que de la premiere de ces especes de Leviers, de laquelle on passe ensuite aux deux autres: on y suppose, dis-je, d'abord un Levier droit sur un appui posé entre deux poids ou deux puissances, ou entre une puissance & un poids; ensuite par des suppositions nouvelles, ce qu'on a dit des proprieté de l'équilibre sur le Levier droit, on l'adapte aux angulaires ou aux coudes de son espece, & ensuite à ceux dont l'appui se trouve à une de leurs extrémités.

III. Ce défaut n'est pas le seul qui empêche ces démonstrations d'être universelles; elles sont encore limitées par la supposition qu'on y fait que les directions des puissances ou des poids appliquez aux Leviers, y sont paralleles entr'elles: de sorte que ce n'est encore que par des suppositions nouvelles qu'on passe de ce cas de parallelisme à celui où les directions feroient quelque angle entr'elles. Ce second défaut a paru seul si considerable au sçavant M. Fermat, qu'il n'a point craint de dire dans la page 142. du Recueil de ses Ouvrages, imprimé à Toulouse en 1679. *Fundamenta Mechanices non satis accurata tradidisse Archimedes fueram dudum suspicatus: supposuisse enim motus gravium descendentium inter se parallelos patet, nec verò absque hac hypothese constare possunt ipsius demonstrationes. Non inficior quidem hypothese hanc ad sensum proximè accommodari, quippe propter magnam à centro Terre distantiam possunt descensus gravium supponi paralleli, non secus ac radii solares: sed veritatem intimam & accuratam querentibus, hæc non satisfaciunt. Generalis nempe Vectium natura in quolibet mundi loco videtur consideranda & astruenda; ideoque nova in Mechanicis fundamenta è veris & proximis principiis sunt accersenda.*

M. de Fermat parle ainsi à l'occasion d'une contestation

rapportée en plusieurs Lettres depuis la pag. 122. jusqu'à la pag. 151. du Recueil qu'on vient de citer de ses Ouvrages, laquelle a duré six mois entre lui d'une part, & Messieurs Paschal & Roberval de l'autre, sans pouvoir s'accorder sur les propriétés du Levier dans l'hypothese des directions des poids concourantes au centre de la Terre, dont il s'agissoit de donner une démonstration immédiate & indépendante du parallélisme : chacun des deux partis trouvoit toujours à rédire à la démonstration que l'autre croyoit en avoir trouvée.

IV. Sans entrer dans le détail de cette contestation qui se trouve dans les Lettres dont on vient de parler, il est aisé de voir par tout ce qui précède, que ces trois grands Géomètres, auxquels les mouvemens composez étoient si familiers, auroient été bien-tôt d'accord entre-eux, s'ils avoient alors seulement tourné la tête de ce côté-là : car voyant, suivant la doctrine de ces mouvemens, conformément au Cor. 7. du Lem. 3. que les deux poids supposés appliquez à un Levier avec des directions tendantes de part & d'autre au centre de la Terre, n'agissoient ensemble sur ce Levier que comme une force unique, égale à la résultante de leur concours, dirigée comme elle suivant la diagonale d'un parallélogramme fait de côtez pris entr'eux en raison de ces poids sur les directions de ces mêmes poids ; ils auroient tout-aussi-tôt, conformément au Corol. 2. du principe general, conclut que pour l'équilibre entre ces deux poids l'appui du Levier devoit être en quelque point à volonté, de sa rencontre avec cette diagonale prolongée, & de-là se feroient offertes à eux toutes les propriétés & les suites qu'on va voir de cet équilibre par cette voye dans le Théoreme suivant, qui renfermera beaucoup plus que ces Messieurs ne cherchoient, étant d'une universalité qui embrasse toutes sortes de Leviers à la fois, quelques soient leurs figures, leurs situations, & les directions des poids ou des puissances qui s'y trouveront appliquées ; & cela sans aucune dépendance du parallélisme de ces directions, sans lequel

avant le Projet de ceci publié en 1687. personne (que je sçache) n'avoit encore rien démontré de ce qui résulte ici de leur concours , qui bien loin d'être ainsi une suite de ce parallélisme , est au contraire le general dont ce parallélisme lui-même n'est qu'un cas sur une infinité de positions différentes de ces directions , toutes comprises dans ce Théoreme universel sous le nom general d'angles quelconques , desquels le plus aigu de toutes les possibles est (dis-je) ce parallélisme lui-même , ainsi qu'il paroît par les Corol. 1. 2. du Lem. 6.

D E F I N I T I O N X X I I .

Les perpendiculaires menées de l'appui d'un Levier quelconque sur les directions des poids ou puissances qui leur seront appliquées , seront appellées leurs *distances à l'appui* , ou simplement les *distances* de ces poids ou de ces puissances ; & les parties du Levier comprises entre ce même appui & les directions de ces poids ou puissances , seront appellées *bras* du Levier.

Le produit de chaque poids ou puissance absolue par sa distance à l'appui du Levier auquel elle est appliquée , s'appelle en Latin *Momentum* , ce que le Corol. 4. du Th. 21. qu'on va voir , me fait croire ne pouvoir mieux s'exprimer en François que (*Déf. 1.*) par le mot de *Force relative* , ou d'*impression* ou d'*action* sur le Levier auquel ce poids ou cette puissance est appliquée : nous ne laisserons pourtant pas de l'appeller aussi *Moment* , pour nous moins éloigner du langage ordinaire. La raison de ce nom vient sans doute de ce que ces produits sont égaux ou inégaux (ainsi qu'on le verra dans les Corol. 7. 8. 9. 10. du Théoreme suivant) comme les impressions de deux puissances sur un Levier , selon qu'elles font ou ne font pas équilibre entr'elles sur son appui. Ce qui se dit ici des forces relatives (*Momenta*) des forces ou puissances absolues , se dit aussi des résistances relatives des absolues , qui (*Ax. 2. 3. 4.*) suppléent ces forces.

DEFINITION XXIII.

Outre l'usage ordinaire des Leviers pour enlever ou remuer de grands fardeaux, le droit MN, dont l'appui B est entre le poids & la puissance, sert encore à peser des marchandises placées à une de ses extrêmités contre un poids de pesanteur connue suspendu à l'autre extrêmité de ce Levier, dans l'hypothèse des directions des poids parallèles entr'elles, & alors ce Levier s'appelle *Balance*, lorsque les bras BM, BN, en sont égaux; & *Pefon* ou *Romaine*, lorsqu'ils sont inégaux.

Fig. 169.
170.

Dans la Balance le Levier MN s'appelle *Fleau* ou *Traversain*; BH, l'*Anse* ou la *Chasse*; BG, l'*Aiguille*, laquelle d'une piece avec le fleau, lui est perpendiculaire, & mobile avec lui autour de l'essieu B; les deux pieces E, F, fixement suspendues aux extrêmités M, N, du fleau, s'appellent *Bassins*, lorsqu'elles sont creusées en forme d'Ecuelles sans oreilles, & *Plateaux*, lorsque ce ne sont que des pieces de bois plates ordinairement quarrées, comme dans certaines Balances des pauvres gens de campagne, ou dans les grandes des Doïianes.

Fig. 169.

Dans le Pefon ou la Romaine le Levier MN s'appelle la *Verge*; BH, l'*Anse*; MC, le *Crochet*, auquel la marchandise E, ou le poids à peser est suspendu à l'extrêmité M de son petit bras BM; & F, la *Masse*, qui est un poids de pesanteur connue, comme d'une livre, ou deux, &c. suspendu à un *Anneau* O plat, posé sur son tranchant, & mobile le long du grand bras BN, dont il est enfilé, & qui est divisé en parties égales à BM.

Fig. 170.

THEOREME XXI.

Fondamental de la presente Section 5.

Dans toutes sortes de Leviers MN de figures & de positions quelconques, quelques soient aussi les directions XE, OF, BH, des trois puissances E, F, H, qui y soient appliquées en autant de points quelconques X, O, B, sçavoir, celle du point du mi-

Fig. 153.
& suivantes
jusqu'à 167.

lieu contre les deux autres, ou deux quelconques E, F , d'entr'elles contre un appui invincible B mis à la place de la troisième H .

I. En cas d'équilibre entre ces trois puissances E, F, H , ou entre les deux premières E, F , sur l'appui B ; quelqu'angle DAP ou RAS , que fassent entr'elles les directions XE, OF , prolongées des puissances E, F , la direction BH prolongée de la puissance H , ou de la résistance de l'appui B mis en sa place, passera toujours par le sommet A de cet angle DAP ou RAS , à travers ce même angle suivant son plan.

II. Cette direction BH de la puissance H ou de l'appui B , sera aussi toujours alors en ligne droite avec la direction de la force résultante (princip. gener. & Lem. 2. 3.) du concours d'action des puissances E, F ; ou (ce qui revient au même) la direction de cette force résultante du concours de ces deux puissances E, F , passera toujours alors du point A de concours de leurs directions, par l'appui B , ou suivant la direction BH de la puissance H , dont cet appui tient lieu (Ax. 2.) par sa résistance. Cette puissance H , ou cet appui B mis en sa place, sera aussi toujours alors d'une résistance égale à la force résultante du concours d'action des deux autres puissances E, F .

III. En quelque raison que la direction BH prolongée de la puissance H , ou de la résistance de l'appui B mis à sa place, divise (part. 1.) l'angle DAP ou RAS compris entre les directions aussi prolongées des puissances E, F ; si l'on imagine un parallélogramme $RASG$ sur une diagonale quelconque AG prise depuis A dans l'angle RAS sur HA , ou BA prolongée de ce côté-là, lequel parallélogramme ait ses côtés AR, AS , sur les directions EX, FO , pareillement prolongées du même côté; la puissance H , ou la charge de l'appui B , résultante sur lui (part. 2.) du concours des puissances E, F , en cas d'équilibre sera à chacune des puissances E, F , comme la diagonale AG de ce parallélogramme RS , sera à chacun de ses côtés AR, AS , correspondans sur leurs directions.

IV. En ce même cas d'équilibre, si les puissances E, F , sont entr'elles comme les parties AR, AS , de leurs directions, & que de ces deux côtés AR, AS , on fasse un parallélogramme

me *RS* ; la diagonale *AG* de ce parallélogramme passera toujours suivant la direction prolongée *BH* de la puissance *H*, ou par l'appui *B* mis en sa place, si c'est sur cette puissance *H*, ou sur cet appui *B*, que ces deux puissances *E*, *F*, sont équilibre ; & la puissance *H*, ou la charge de l'appui *B* mis en sa place, sera encore pour lors à chacune des puissances *E*, *F*, comme la diagonale *AG* du parallélogramme *RS*, est à chacun de ses côtes *AR*, *AS*, correspondans sur leurs directions.

V. Reciproquement si la direction de la force résultante (princ. gener. Lem. 2. 3.) du concours des puissances *E*, *F*, passe par l'appui *B*, il y aura équilibre entre ces deux puissances sur cet appui mis à la place de la puissance *H* ici retranchée.

VI. Pareillement si la diagonale *AG* prolongée du parallélogramme *RS* fait comme dans la part. 4. de côtes *AR*, *AS*, pris sur les directions des puissances *E*, *F*, en raison de ces mêmes puissances, passe par l'appui *B* ; ou (ce qui revient au même) si l'on met un appui *B* dans quelque point que ce soit de la rencontre de cette diagonale prolongée avec le Levier *MN* ; il y aura toujours encore équilibre entre ces puissances *E*, *F*, sur cet appui *B*.

DEMONSTRATION.

PART. I. Le Corol. 14. du Lem. 3. fait voir qu'en cas d'équilibre entre les trois puissances *E*, *F*, *H*, appliquées (*Hyp.*) au corps *MN*, ou entre les deux premières *E*, *F*, & l'appui *B* suppléant (*Ax.* 2.) la troisième *H* ; leurs trois directions *XE*, *OF*, *BH*, doivent passer le long d'un même plan, chacune à travers l'angle des deux autres, & par son sommet, lequel sera infiniment éloigné (Lem. 6. Corol. 1. 2.) si ces trois directions sont parallèles entr'elles. Donc en ce cas d'équilibre, quelque soit l'angle *DAP* ou *RAS* compris entre les deux premières *XE*, *OF*, de ces trois directions prolongées ; la troisième *BH* de la puissance *H*, ou de la résistance de l'appui *B*, qui (*Ax.* 2.) la suppléeroit, passera toujours par le sommet *A* de cet angle, à travers ce même angle suivant son plan. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

PART. II. Regardons pour un moment la puissance H oisive & sans action ; le nomb. 1. du Corol. 1. du Lem. 3. fera voir, comme on l'a déjà vû dans la démonstration de la part. 2. du Th. 19. & ailleurs, que du concours d'action des puissances E, F, il doit résulter sur le Levier MN une nouvelle force suivant quelque ligne AG qui passe par la pointe A de l'angle RAS compris entre les directions de ces deux puissances, suivant laquelle ligne AG ce corps seroit ici pressé, poussé, ou tiré par le concours de ces deux puissances E, F, comme si au lieu de l'être ainsi par elles ensemble, il ne l'étoit suivant cette ligne AG que par une seule force égale à la résultante de leur concours ; & que ce corps ainsi pressé, poussé, ou tiré suivant cette ligne AG, se mouvroit effectivement (*Ax. 1.*) suivant cette direction de A vers G, si rien ne s'y opposoit. Donc n'y ayant ici (*Hyp.*) d'obstacle qu'en B, de la part de la puissance H remise en action suivant BH contre les deux autres E, F, ou de la part de l'appui B, qui mis à la place de cette puissance H, la supplée (*Ax. 2.*) par la résistance, non seulement cette direction AG de la force résultante du concours des puissances E, F, doit dans le cas d'équilibre ici supposé, se trouver effectivement (*Lem. 3. Corol. 2. nomb. 1.*) suivant BH, si c'est avec la puissance H que les puissances E, F, y demeurent en équilibre, ou passer (*princ. gener. Corol. 2.*) par l'appui B, si c'est sur cet appui que ces deux puissances demeurent ainsi en équilibre entr'elles ; mais encore cette force résultante de A vers G du concours de ces deux puissances E, F, doit alors (*Lem. 3. Corol. 2. nomb. 3.*) être égale à la résistance de cette puissance H, ou de l'appui B ; c'est-à-dire (*Lem. 3. Corol. 2.*) égale & directement opposée à cette résistance. *Ce qu'il falloit 2^o. démontrer.*

PART. III. Suivant cette précédente part. 2. l'on voit qu'en ce cas d'équilibre entre les trois puissances E, F, H, ou entre les deux premières E, F, sur l'appui B, qui (*Ax. 2.*) suppléeroit à la troisième H ; la force résultante du concours de ces deux puissances E, F, doit être égale

& directement opposée à la résistance que leur fait la puissance H, ou l'appui B mis à la place de cette puissance H ; de sorte que BH étant (*Hyp.*) la direction de la résistance de la puissance H ou de l'appui B, cette force résultante du concours d'action des puissances E, F, contre cette résistance, doit en ce cas-ci d'équilibre, non seulement être égale à cette même résistance de la puissance H ou de l'appui B, mais encore être dirigée suivant HB en sens directement contraire à celui de cette résistance, qui est (*Hyp.*) suivant BH, c'est-à-dire (*part. 2.*) être dirigée suivant AB, ou (*constr.*) suivant la diagonale AG du parallélogramme RS, lequel ayant (*constr.*) les côtes AR, AS, sur les directions des puissances E, F, du concours desquelles cette force résulte, fait conséquemment voir (*Lem. 3. Corol. 1. nomb. 2.*) que cette même force suivant AG, doit être ici à chacune des puissances E, F, comme cette diagonale AG est à chacun de ces côtes AR, AS, correspondans sur leurs directions. Donc la puissance H, ou la résistance de l'appui B mis en sa place, & par conséquent aussi (*Déf. 21. Corol.*) la charge de cet appui, doit être ici à chacune des puissances E, F, (supposées en équilibre contre cette puissance H, ou sur cet appui B) comme la diagonale AG du parallélogramme RS est à chacun de ses côtes AR, AS, correspondans sur les directions de ces deux puissances E, F. *Ce qu'il falloit 3°. démontrer.*

PART. IV. Puisque (*Hyp.*) $E.F.::AR.AS$. la direction de la force résultante du concours de ces deux puissances E, F, doit être (*Lem. 3. Corol. 1. nomb. 1.*) de A vers G suivant la diagonale AG du parallélogramme RS, ou (ce qui revient au même) cette diagonale AG doit être suivant cette direction de la force résultante du concours des puissances E, F. Or (*part. 2.*) en cas d'équilibre cette même direction doit être suivant BH ou passer par B. Donc en ce même cas d'équilibre ici supposé, la diagonale AG doit toujours aussi être suivant BH, ou passer par B ; & conséquemment (*part. 3.*) la puissance

H, ou la charge de l'appui B mis en sa place, doit encore être ici à chacune des deux puissances E, F, (supposées en équilibre avec cette puissance H, ou sur cet appui B) comme la diagonale AG du parallélogramme RS, est à chacun de ses côtes AR, AS, qui leur répondent sur leurs directions. *Ce qu'il falloit 4°. démontrer.*

PART. V. Cette part. 5. se trouve démontrée dans le Corol. 1. du principe general, en ce que lorsque la direction de la force résultante du concours des puissances E, F, passe par l'appui B, la résistance invincible (*Hyp.*) de cet appui, que cette force trouve alors à son passage, quand elle tend vers lui, comme dans les Fig 153. 155. 157. 159. 162. 164. 166. 167. ou quand il tire (pour ainsi dire) contr'elle, lorsqu'elle tend à s'en éloigner, comme dans les Fig. 154. 156. 158. 160. 161. 163. 165. doit l'arrêter tout court, & mettre ainsi (*Lem. 3. Corol. 1. nomb. 4.*) en équilibre entr'elles sur cet appui B les puissances E, F, sans qu'aucune d'elles puisse faire pancher le Levier MN d'aucun côté; puisque cette force résultante de leur concours, & ainsi arrêtée ou soutenue toute entière par l'appui, est (*Lem. 3. part. 3. & Corol. 6.*) tout ce que ces deux puissances E, F, font d'effort sur ce Levier MN. *Ce qu'il falloit 5°. démontrer, & ce qu'on verra encore l'être ci-après dans le Schol. du Th.*

PART. VI. Puisque les puissances E, F, sont ici entr'elles (*Hyp.*) comme les côtes AR, AS, du parallélogramme RS, suivant lesquels elles sont dirigées: la force résultante de leur concours fera (*Lem. 3. Corol. 2. nomb. 1.*) suivant la diagonale AG de ce parallélogramme. Donc cette diagonale prolongée passant (*Hyp.*) par l'appui B, il y aura encore ici équilibre (*part. 5.*) entre ces deux puissances E, F, sur cet appui B. *Ce qu'il falloit 6°. démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

Ce Th. 21. pourroit encore se démontrer par le Th. 1. en considérant le Levier MN comme un corps sans pesanteur, tiré avec des cordes par trois puissances E, F, H,

à la fois, ou comme un corps tiré par les deux premières E, F, contre la troisième H qui lui tiennne lieu de pesanteur, de même que si ce Levier MN étoit un poids de cette pesanteur H, soutenu ou tiré avec des cordes XE, OF, par ces deux premières puissances E, F. Suivant cela,

PART. I. La partie 1. du Th. 1. fera voir qu'en cas d'équilibre, la direction BH prolongée de la pesanteur ou puissance H, passera toujours par le concours A des directions pareillement prolongées XE, OF, des puissances E, F, suivant leur plan, & à travers l'angle DAP ou RAS, que ces deux directions-ci prolongées font entre-elles, quel qu'il soit: de sorte qu'en imaginant au Levier MN un appui B, dont la résistance contre les puissances E, F, y supplée (Ax. 2.) celle de sa pesanteur ou puissance H, c'est-à-dire, dont la résistance & la direction soient les mêmes que celles de cette puissance ou pesanteur H de ce Levier; cette direction HB prolongée de cet appui B, ou de cette puissance H, passera encore (en cas d'équilibre) par le sommet A de l'angle DAP ou RAS compris entre les directions ainsi prolongées des puissances E, F, à travers de cet angle & suivant son plan. *Ce qu'il falloit encore 1°. démontrer.*

PART. II. La part. 2. du Th. 1. fait aussi voir qu'en ce cas d'équilibre cette direction BH de la puissance ou pesanteur H du Levier MN, fera toujours en ligne droite avec celle de la force résultante du concours des puissances E, F. Donc en substituant encore un appui B dans la direction BH de cette pesanteur ou puissance H, au lieu d'elle, lequel (Ax. 2.) la supplée par sa résistance; la direction de la force résultante du concours des puissances E, F, passera aussi toujours (en cas d'équilibre) par cet appui B. *Ce qu'il falloit encore 2°. démontrer.*

PART. III. La part. 3. du Th. 1. fait aussi voir qu'en ce même cas d'équilibre, la puissance ou pesanteur H du Levier MN, & conséquemment aussi (Ax. 2.) la résistance de l'appui B mis en la place de cette puissance ou pesanteur H, doit toujours être à chacune des puissances

E, F, comme la diagonale AG du parallélogramme RS, est à chacun de ses côtez AR, AS, correspondans sur les directions EX, FO, prolongées de ces puissances E, F. *Ce qu'il falloit encore 3°. démontrer.*

PART. IV. La part. 4. du Th. 1. fait pareillement voir qu'en ce cas d'équilibre, non seulement la direction de la force résultante du concours des puissances E, F, c'est-à-dire (*Lem. 3. Corol. 1. nomb. 1.*) la diagonale AG du parallélogramme RS, fait des côtez AR, AS, pris en raison de ces deux puissances sur leurs directions, passera toujours suivant la direction BH de la puissance ou pesanteur H du Levier MN, & conséquemment aussi par l'appui B, mais encore que la résistance de cette puissance ou pesanteur H, ou de l'appui B mis en sa place dans sa direction BH, doit alors être à chacune des puissances E, F, comme cette diagonale AG du parallélogramme RS est à chacun de ses côtez AR, AS, correspondans sur les directions de ces deux puissances E, F. *Ce qu'il falloit encore 4°. démontrer.*

Les part. 5. 6. de ce Théoreme-ci pourroient aussi se démontrer par la part. 6. du Th. 1. mais les démonstrations qui en résulteroient, ne seroient que celles-là mêmes qui seroient de ces deux part. 5. 6. dans la démonstration générale qui précède celle-ci, seulement plus longues & moins claires que celles-là par le tour qu'il faudroit prendre alors pour y revenir; c'est pour cela que nous ne nous y arrêterons pas davantage.

Nous ne parlerons pas non plus davantage de la puissance H qui, prise au hazard entre les trois puissances E, F, H, appliquées au Levier MN, en quelque ordre, & suivant quelques directions que ce soient, ne vient d'être employée que pour faire voir que l'appui B mis en sa place, c'est-à-dire, en son point d'application à ce Levier, résisteroit de même qu'elle aux deux autres puissances E, F, en équilibre entr'elles; & qu'un Levier quelconque pressé, poussé, ou tiré par deux puissances sur un appui placé à tel point qu'on voudra de ce Levier, revient toujours à un qui le seroit par trois puissances, dont une quelconque seroit à la place de cet appui, & dont une quelconque

aussi

aussi agiroit seule contre les deux autres : pour faire voir, dis-je, qu'en quelque point d'application de ces trois puissances à un Levier, qu'on plaçât cet appui au lieu de celle qui y étoit appliquée, l'équilibre s'y feroit toujours de même, & avec les mêmes rapports entre les deux puissances restantes, & la résistance de cet appui, qu'entre ces deux mêmes puissances & la troisième dont cet appui tiendrait la place : & qu'ainsi la division ordinaire des Leviers en trois especes distinguées entr'elles par les différentes positions de cet appui & des deux puissances qu'il soutient, est aussi inutile pour avoir ces rapports, qu'on l'a cru nécessaire pour passer de celui d'entre deux puissances en équilibre sur un appui entr'elles (qui étoit le seul qu'on y cherchât avant le Projet qui parut de ceci en 1687.) à celui d'entre deux puissances, dont l'une seroit entre l'autre & cet appui. Nous ne parlerons donc plus de la puissance H, mais seulement de l'appui B, qu'on vient de voir en faire la fonction contre les deux autres puissances E, F, en équilibre entr'elles.

A V E R T I S S E M E N T.

Pour abreger nos expressions, nous appellerons dorénavant B, la charge ou (Déf. 21. Corol.) la résistance de l'appui de ce nom.

C O R O L L A I R E I.

En cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B, la diagonale AG du parallelogramme RS de la part. 4. fait des côtez AR, AS, pris en raison de ces deux puissances E, F, sur leurs directions, passant toujours (part. 4.) par cet appui B; il est visible que ce parallelogramme doit être le même que celui de la part. 3. fait sur cette diagonale AG prise sur AB, sans se mettre en peine du rapport de ses côtez AR, AS, supposez seulement sur les directions des puissances E, F; & ainsi en ce cas d'équilibre le rapport de AR. AS :: E. F. supposé dans la part. 4. doit aussi se trouver dans la part. 3. Ce qui suit aussi de cette même & seule part. 3. puisque donnant E. B :: AR. AG. & B. F :: AG. AS. en cas d'équilibre,

elle doit aussi donner alors (en raison ordonnée) $E. F. :: AR. AS.$

COROLLAIRE II.

Par conséquent la diagonale AG prolongée passant toujours (*part.* 3. 4.) par l'appui B en cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur cet appui, si de ce même appui B on imagine les perpendiculaires BD, BP, sur les directions XE, OF, prolongées de ces deux puissances; le Lem. 8. donnant $AR. AS. :: BP. BD.$ ce cas d'équilibre donnera aussi toujours (*Corol.* 1.) $E. F. :: BP. BD.$ c'est-à-dire (*Déf.* 2. 2.) que ces puissances E, F, seront toujours alors entr'elles en raison reciproque de leurs distances BD, BP, à l'appui B de leur équilibre.

COROLLAIRE III.

Reciproquement si $E. F. :: BP. BD.$ il y aura équilibre entre ces deux puissances E, F, sur l'appui B: car si autour d'une diagonale quelconque AG prise depuis A vers G sur AB prolongée, on imagine un parallelogramme RS qui ait ses côtes AR, AS, sur les directions prolongées EX, FO, des puissances E, F, le Lem. 8. donnant alors $BP. BD. :: AR. AS.$ l'on aura aussi pour lors $E. F. :: AR. AS.$ Par conséquent ces deux puissances E, F, seront alors (*part.* 6.) en équilibre entr'elles sur l'appui B.

Fig. 154. C'est-là, suivant ce qu'on a rapporté de M. Fermat au commencement de cette Section-ci dans l'art. 3. du Schol. de la Déf. 21. ce que lui, M. Paschal, & M. de Roberval cherchoient dans le cas de la Fig. 154. en y prenant A pour le centre de la Terre, & les puissances E, F, pour des poids qui y tendent; & comme les démonstrations précédentes conviennent à toutes sortes de Leviers, & à toutes sortes de directions des poids ou puissances qui y seront appliquées, au lieu du Levier droit MN de la Fig. 154. on peut prendre ici le circulaire ponctué X β Bx concentrique à la Terre (auquel les puissances ou les poids E, F, de tendances à son centre A, seroient appliquées en X, x, & lui rencontré en B par la direction prolongée

AG de l'effort résultant du concours de ces poids ou puissances) ainsi que faisoient Messieurs de Fermat, Paschal & de Roberval, pour arriver (à ce qu'ils croyoient) plus aisément au but où ils tendoient, comme si la figure du Levier, & la variété des directions des poids ou puissances, y faisoient quelque chose. Les propriétés que ces Messieurs y cherchoient, sont ici démontrées de ce Levier circulaire $X\beta Bx$ chargé sur son appui B de puissances ou de poids tendans à son centre A, comme de tout ce qu'on y voit d'autres Leviers; sçavoir, que $E.F :: BP. BD.$ dans ce Levier circulaire ainsi chargé, comme dans tous ceux-là. M. de Roberval, qui parloit pour lui, & pour M. Paschal contre M. de Fermat, arriva pourtant à cette propriété pour ces directions requises de poids tendans au centre A de la Terre, en démontrant (comme Archimede) le rapport de deux puissances de directions paralleles, en équilibre sur un Levier droit d'un appui posé entr'elles, & en passant ensuite de ces directions paralleles aux concourantes. Mais M. de Fermat s'opposoit à ce passage, quoiqu'il admît ce principe d'Archimede pour les directions paralleles, & que pour le faire servir aux directions concourantes, M. de Roberval n'y employât que les suppositions qu'on y employe encore tous les jours; marque que ces suppositions, quoique vraies, ne sont pas assez claires pour être admises aussi gratuitement qu'on les fait.

COROLLAIRE IV.

Si les puissances E, F, au Levier MN, n'y faisoient point équilibre entr'elles sur son appui B, & que ce fût, par exemple, la puissance E qui l'emportât sur la puissance F; il est visible que la puissance E seroit alors plus grande, ou la puissance F plus petite qu'il ne faudroit pour faire équilibre entr'elles suivant leurs directions; & conséquemment (Corollaire 2.) qu'on auroit alors $E.F > BP. BD.$

FIG. 153.
& suivantes
jusqu'à 167.

COROLLAIRE V.

Reciproquement si $E.F > BP. BD.$ il n'y aura point d'é-

Rij

équilibre entre les puissances E, F , sur l'appui B , & ce sera E qui l'emportera sur la puissance F ; puisque s'il y avoit équilibre entr'elles, l'on auroit alors (*Corol. 2.*) $E.F::BP.BD.$ Et si c'étoit F qui l'emportât sur E , l'on auroit aussi pour lors (*Corol. 4.*) $E.F < BP.BD.$ Ce qui l'un & l'autre seroit contre l'hypothese. Donc si $E.F > BP.BD.$ il n'y aura point d'équilibre entre les puissances E, F , sur l'appui B . On démontrera de même qu'il n'y en auroit pas non plus si $F.E::BD.BP.$ & que ce seroit alors F qui l'emporteroit sur E .

De ces Corollaires suit la raison de la force des Ciseaux, des Pincettes, des Tenailles, & de semblables Machines. Car ce sont autant de Leviers, ou plutôt de doubles Leviers dans chacun de ces instrumens, dont le clou qui en lie les deux Leviers ensemble, est le centre ou l'appui commun de ces deux Leviers; & parce que les branches qu'on tient à la main, sont plus longues que les serres, aussi la force qu'on applique à ces branches qui en sont comme les distances à l'appui, y a un bien plus grand effet par rapport à ce qu'on pince dans les serres, & ce d'autant plus grand que ces branches sont plus longues que ces serres.

COROLLAIRE V I.

Le Corol. 2. donnant $E.F::BP.BD.$ en cas d'équilibre entre les puissances E, F , sur l'appui B ; & le Corol. 4. donnant $E.F > BP.BD.$ en cas de non équilibre, & que ce fût la puissance E qui l'emportât sur la puissance F , l'on aura $E \times BD = F \times BP$ dans le premier cas, & $E \times BD > F \times BP$ dans le second; c'est-à-dire (*Déf. 22.*) que les *Momens* seront égaux entr'eux dans le premier cas, & le *Moment* de la puissance E plus grand que celui de la puissance F dans le second.

COROLLAIRE V I I.

Le Corol. 3. fait reciproquement voir que les puissances E, F , seront en équilibre entr'elles sur l'appui B , si les *Momens* en sont égaux entr'eux, c'est-à-dire (*Déf. 22.*)

si $E \times BD = F \times BP$; puisqu'alors on auroit $E. F :: BP. BD.$ auquel cas le Corol. 3. fait voir qu'il y auroit équilibre entre les puissances E, F , sur l'appui B .

C O R O L L A I R E V I I I.

Le Corol. 5. fait reciproquement voir que les puissances E, F , ne seront point en équilibre entr'elles sur l'appui B , si les *Momens* en sont inégaux, & que ce sera la puissance E qui l'emportera sur la puissance F , si le *Moment* de la premiere est plus grand que celui de la seconde, c'est-à-dire (*Déf. 22.*) si $E \times BD > F \times BP$; puisqu'on auroit alors $E. F > BP. BD.$ auquel cas le Corol. 5. fait voir qu'il n'y auroit point d'équilibre entre les puissances E, F , sur l'appui B .

C O R O L L A I R E I X.

Il suit des précédens Corol. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. que le degré ou la quantité d'action ou d'impression (*Momentum*) d'une puissance sur un Levier, ne se prend pas seulement de la grandeur de sa force employée, mais aussi de sa distance de sa ligne de direction au point d'appui du Levier sur lequel elle agit: de sorte que le produit de cette distance par la force employée de cette puissance, est la mesure de son action; ou de l'impression (*Momentum*) qu'elle fait sur ce Levier. D'où l'on voit que lorsque plusieurs puissances ou poids sont équilibre entr'eux sur un appui de Levier: il faut que les sommes de ces produits ou *Momens* antagonistes soient égales de part & d'autre de l'appui; & reciproquement que si ces deux sommes sont égales entr'elles, tous ces poids ou puissances demeureront en équilibre sur cet appui. Cela se verra encore autrement dans le Corol. 1. du Th. 25.

C O R O L L A I R E X.

Ce Corol. 9. fait aussi voir qu'en quelque point d'un Levier qu'une puissance lui soit appliquée, pourvu que

la distance de la ligne de direction de cette puissance au point d'appui de ce Levier soit toujours la même ; son action ou impression (*Momentum*) sur ce Levier sera aussi toujours la même.

Par la même raison , si différentes puissances égales agissoient successivement suivant la même direction , ou suivant des directions également distantes du point d'appui du Levier auquel elles seroient appliquées ; leurs actions ou impressions (*Momenta*) sur ce Levier seroient aussi égales ; & conséquemment (*Corol. 5.*) il y auroit alors équilibre entr'elles.

COROLLAIRE XI.

Si presentement on prend pour sinus total la droite AB menée de l'appui B du Levier MN au concours A des directions EX, FO, prolongées des puissances E, F, appliquées en X, O, à ce Levier ; les perpendiculaires BD, BP, menées de cet appui B sur ces directions, se trouvant alors être (*Déf. 9.*) les sinus des angles BAE, BAF, de chacune de ces mêmes directions avec la droite AB, ce qu'on voit de ces perpendiculaires BD, BP, dans les *Corol. 2. 3. 4. 5.* est pareillement vrai des sinus de ces deux angles BAE, BAF : sçavoir,

1°. Qu'en cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B, ces deux puissances E, F, seront toujours alors entr'elles (*Corol. 2.*) en raison reciproque des sinus de ces angles BAE, BAF, compris entre chacune des directions de ces puissances & la droite AB.

2°. Reciproquement que si ces deux puissances E, F, appliquées au Levier MN, y sont entr'elles en ce rapport, il y aura pour lors (*Corol. 3.*) équilibre entr'elles sur cet appui B.

3°. Que si les puissances E, F, appliquées au Levier MN, n'y faisoient point équilibre entr'elles sur l'appui B, & que ce fût, par exemple, la puissance E qui l'emportât sur la puissance F, cette puissance E seroit alors (*Corol. 4.*)

à cette puissance F en plus grande raison que le sinus de l'angle BAF au sinus de l'angle BAE .

4°. Reciproquement, que si la puissance E étoit à la puissance F en plus grande raison que le sinus de l'angle BAF au sinus de l'angle BAE , cette puissance E l'emporteroit (*Corol. 5.*) sur la puissance F , de manière qu'il n'y auroit point alors d'équilibre entr'elles.

COROLLAIRE XII.

Soit b le point où la droite XO est rencontrée par la diagonale AG prolongée de part ou d'autre jusqu'à elle, & que les angles bXA , bOA , des directions des puissances E , F , avec cette droite XO , soient égaux entr'eux: les *Corol. 2. 3.* font voir que si ces deux puissances ainsi appliquées au Levier MN , sont en équilibre entr'elles sur son appui B , elles seront alors entr'elles en raison reciproque des bras bX , bO , d'un Levier droit XO , dont l'appui seroit en b ; c'est-à-dire, qu'on auroit alors $E. F :: bO. bX$. Et reciproquement que si ces deux puissances sont entr'elles en cette raison, elles seront aussi en équilibre entr'elles sur cet appui B ou b . Car en menant bd , bp , perpendiculaires aux directions XE , OF , prolongées de ces deux puissances E , F , & conséquemment (*Cor. 2.*) parallèles à BD , BP , chacune à chacune;

1°. Dans les Fig. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. où les angles (*Hyp.*) égaux bXA , bOA , rendent le triangle XAO isoscèle; les triangles bdA , bpA , ainsi faits semblables aux triangles BDA , BPA , chacun à chacun, de même que les semblables entr'eux bdX , bpO , donneront $BP. BD :: bp. bd :: bO. bX$. Donc en cas d'équilibre sur l'appui B , l'on aura ici (*Corol. 2.*) $E. F :: bO. bX$. Et reciproquement si ces deux puissances E , F , sont entr'elles en cette raison, il y aura ici (*Cor. 3.*) équilibre entr'elles sur l'appui B .

2°. Dans les Fig. 163. 164. 165. 166. 167. où les angles (*Hyp.*) égaux bXA , bOA , rendroient les droites EX , FO , & conséquemment aussi (*Lem. 6. Corol. 1. 2.*) BA ,

FIG. 153.
& suivantes
jusqu'à
162.

FIG. 163.
& suivantes
jusqu'à
167.

toutes trois paralleles entr'elles: ce qui rendant semblables les triangles bdX , bpO , & égales deux à deux, les perpendiculaires comprises entre BA , & chacune des deux autres EX , EO de ces trois paralleles, sçavoir, $bd=BD$, & $bp=BP$; l'on auroit encore ici, comme dans le nomb. 1. $BP.BD::bp.bd::bO.bX$. Donc aussi en cas d'équilibre entre les puissances E , F , sur l'appui B , l'on auroit ici (*Corol. 2.*) $E.F::bO.bX$. Et reciproquement si ces deux puissances E , F , étoient entr'elles en cette raison, il y auroit ici (*Corol. 3.*) équilibre entr'elles sur l'appui B .

COROLLAIRE XIII.

Fig. 153.
154. 163.
164.

Si presentement on suppose que sur un Levier droit MN d'un appui B posé dans sa direction, tel que dans les Fig. 153. 154. 163. 164. les directions des puissances E , F , sont paralleles entr'elles: les bras BX , BO , de ce Levier étant alors (*Déf. 22.*) les distances elles-mêmes de son appui B aux directions EX , FO , de ces deux puissances, ou en raison de ces distances, selon que ces directions paralleles EX , FO , seront perpendiculaires, ou non, à ce Levier droit MN : les *Corol. 2. 3.* font voir que si ces deux puissances E , F , sont entr'elles en raison reciproque de ces bras BX , BO , du Levier, c'est-à-dire, si $E.F::BO.BX$. il y aura pour lors équilibre entr'elles sur l'appui B ; & reciproquement que si avec de telles directions sur un Levier droit, elles sont en équilibre entr'elles, elles seront aussi pour lors en ce rapport. Tout cela suit aussi du précédent *Corol. 12.*

C'est-là ce qu'on appelle d'ordinaire le premier principe de Mécanique, excepté *M. Descartes*, & *Varron Jurisconsulte Genevois*, lesquels ont pris tous deux pour ce premier principe, qu'il ne faut ni plus ni moins de force pour lever un corps pesant à une certaine hauteur, que pour en lever un autre moins pesant à une hauteur d'autant plus grande, qu'il est moins pesant, ou en lever un plus pesant à une hauteur d'autant moindre. C'est ainsi que parle *M. Descartes*

cartes dans ses Lettres, Tom. I. Lett. 73. Voici présentement comment parle Varron dans la pag. 23. de son Traité De Motu, imprimé à Geneve en 1584. chez Jacques Stoer: *Tantum enim est libram unam quatuor spatiis moveri, quantum libras quatuor uno spatio eodem tempore. Cet Auteur dit aussi dans la pag. 22. Si enim tanta sit tarditas motûs vis unius, respectu motûs vis alterius, quanta est proportio vis illius ad hanc, non fiet motus. Ce qui est aussi le principe de Galilée, lequel principe revient à l'autre, ou l'autre à lui; puisque dans les Machines les espaces sont toujours comme les vitesses.*

Au reste, tout cela suit si naturellement de notre Ax. I. connu de tout le monde, qu'il n'a pas été nécessaire que Galilée ni Descartes aient ici rien emprunté de Varron, ni Descartes de Galilée. Aussi n'est-ce que pour indiquer ce principe, & pour rendre justice à tous les trois, qu'on rapporte ici ce qu'ils en ont dit.

COROLLAIRE XIV.

Il suit du précédent Corol. 13. que dans la supposition qu'on fait d'ordinaire des directions paralleles des poids appliquez à une Balance ou à une Romaine, mobiles en B l'une & l'autre par rapport à leur anse BH; les poids E, F, en équilibre aux extrêmités M, N, des bras égaux BM, BN, d'une Balance représentée dans la Fig. 169. y doivent être égaux entr'eux; & qu'en équilibre à l'extrêmité M d'un des bras BM de la Romaine représentée dans la Fig. 170. & au point quelconque O de son autre bras BN, ces deux poids doivent être entr'eux en raison reciproque des distances BM, BO, où ils se trouvent alors du point B. Ce qui fait voir l'utilité de la Balance pour peser des poids égaux, & de la Romaine pour en peser d'inégaux quelconques E contre un Peson F toujours le même, mobile le long d'un bras BN: des poids E, dis-je, d'autant plus grands que la longueur du bras BN l'est davantage par rapport à l'autre bras BM, & que le Peson F peut s'éloigner davantage de l'appui ou de l'essieu B de la Romaine.

FIG. 169.
170.

Pour la sûreté de ces Machines à peser, il y a des précautions à prendre dans leur construction & dans leur usage: on en parlera dans la suite.

COROLLAIRE XV.

FIG. 153.
& suivantes
jusqu'à 162.

Quelques soient les directions des puissances quelconques E, F, il suit aussi des part. 5. 6. que dans les Leviers des Figures marquées ici en marge, dans lesquelles la diagonale AG prolongée du parallélogramme RS, passe dans l'angle XAO compris entre les directions de ces puissances; cette diagonale prolongée passant toujours par quelque point de ces Leviers, quelqu'en soient les figures & les longueurs, il y aura toujours quelque point B, sçavoir, celui de leur rencontre avec cette diagonale prolongée, sur lequel appuyez ou soutenus, ces deux puissances E, F, pourront toujours demeurer en équilibre entr'elles, quelque rapport qu'elles aient l'une & l'autre, & quelqu'en soient les directions.

COROLLAIRE XVI.

FIG. 163.
164. 165.
166. 167.

Il n'en va pas de même des autres Leviers des Figures marquées pareillement ici en marge, dans lesquelles la diagonale AG, quelque prolongée qu'elle soit, ne passe point dans l'angle XAO, mais dans son complément à deux droits. Car cette diagonale AG, quelque prolongée qu'elle soit, pouvant ne point rencontrer ces Leviers, faute d'être assez long ou de figure qui le permette, & même ne pouvant jamais les rencontrer, quelques longs qu'ils soient, lorsqu'ils sont droits, comme dans les Fig. 163. 164. & que les puissances E, F, qui leur sont appliquées, sont entr'elles en raison reciproque des sinus des angles de leurs lignes de direction avec ces Leviers, & rendant ainsi la diagonale AG parallèle à ces mêmes Leviers; tous ces Leviers peuvent être de figure ou de longueur à n'avoir jamais chacun aucun point sur lequel appuyé il puisse soutenir les puissances E, F, en équilibre entr'elles, & même les droits, quelques longs qu'ils soient,

ne peuvent jamais avoir un tel point d'appui, lorsque ces puissances y sont entr'elles dans la raison précédente.

C O R O L L A I R E X V I I.

Ainsi en general lorsque deux puissances E, F , étant données avec leurs directions, & la position MN du Levier auquel elles sont appliquées, on demande le point d'appui B de ce Levier, sur lequel ces deux puissances demeureroient en équilibre entr'elles; il n'y a qu'à prolonger la diagonale AG du parallelogramme RS fait (comme ci-dessus) de côtez AR, AS , pris en raison de ces deux puissances E, F , sur leurs directions depuis le point de concours de ces mêmes directions: si cette diagonale AG prolongée rencontre le Levier MN , leur point de rencontre fera (*part. 5. 6.*) celui de l'appui cherché; & si elle ne peut le rencontrer, ce Problème fera (*principe gener. Corol. 2.*) impossible.

FIG. 153.
& suivantes
jusqu'à 167.

C O R O L L A I R E X V I I I.

Il suit encore des *part. 5. 6.* conformément aux *Corol. 14. 15.* que les deux mêmes puissances quelconques E, F , peuvent faire successivement équilibre sur une infinité de points d'appui B d'un même Levier MN , en changeant seulement leurs directions; puisqu'on les peut varier en tant de manieres que la diagonale AG prolongée passera successivement par tous les points imaginables de ce même Levier, excepté par les points X, O , où ces deux puissances lui sont appliquées.

C O R O L L A I R E X I X.

Il suit aussi du nomb. 1. du *Corol. 11.* que si un poids E est appliqué en X à un Levier XB avec plusieurs puissances F, F , de directions différentes, capables de le soutenir chacune suivant sa direction particuliere XF sur l'appui B de ce Levier; & que si après avoir mené d'un point A quelconque de la direction XA du poids E , la droite AZ parallele à BX menée de cet appui B au point

FIG. 168.

Sij

d'application X, quelque soit la figure de ce Levier, on prolonge toutes les directions FX, FX, jusqu'à la rencontre M, M, de cette droite AZ; chaque ligne XM exprimera la puissance F, dont elle sera la direction, & toutes les XM toutes les puissances F capables chacune de soutenir le même poids E dans la même situation XB du Levier sur son appui B.

Car le nomb. 1. du Corol. 11. fait voir que chaque puissance F capable de soutenir suivant sa direction XF sur l'appui B du Levier XB, doit être à ce poids comme le sinus de l'angle BXA est au sinus de l'angle BXF, ou (à cause de AZ supposée parallèle à BX) comme le sinus de l'angle XAM est au sinus de l'angle XMA correspondans; & par conséquent aussi (Lem. 8. Corol. 2.) comme chaque XM est à XA. Donc toutes les XM seront ici entr'elles comme toutes les puissances F capables d'y soutenir le même poids E chacune suivant la direction de chaque XM correspondantes. Donc aussi,

1°. Lorsque la direction XF d'une de ces puissances F fera en ligne droite avec XA du côté opposé; XM se trouvant alors égale à XA, cette puissance F sera aussi pour lors égale au poids E.

2°. Si l'angle BXF du côté de F se trouve égal à l'angle BXA, la puissance F se trouvera encore alors égale au poids E; puisque les parallèles AZ, BX, qui rendent les angles $XMA = BXF$, $XAM = BXA$, rendroient $XMA = XAM$, & conséquemment $XM = XA$.

3°. Donc (nomb. 1.) les puissances F pourroient avoir deux directions, sçavoir, celles des nomb. 1. 2. suivant lesquelles elles devroient chacune être égale au même poids E pour le soutenir en équilibre sur l'appui B du Levier BX.

4°. Lorsque XF se trouvera confondue avec XB parallèle (Hyp.) à AZ, la prolongation de XM parallèle aussi pour lors à AZ, se trouvant alors infinie par rapport à XA; la puissance F qui auroit cette direction, devroit aussi être infinie par rapport au poids E pour pouvoir ici le soutenir sur l'appui B.

C O R O L L A I R E X X.

Si l'on imagine presentement differens poids E , soutenus sur l'appui B du Levier XB par une puissance F suivant différentes directions XF ; le nomb. 1. du Corol. 11. fait encore voir que tous ces differens poids E , capables d'être ainsi successivement soutenus par une même puissance F , seront entr'eux comme les sinus des angles BXF faits des XB avec les directions correspondantes XF de cette puissance.

Car ce nomb. 1. du Corol. 11. fait voir qu'en cas d'équilibre cette puissance F doit être à chaque poids E , qu'elle soutiendrait ainsi, comme le sinus de l'angle (*Hyp.*) constant BXE seroit au sinus de chaque angle BXF que la direction XF suivant laquelle cette puissance F soutiendrait ce poids E , feroit avec XB . Donc tous ces differens poids E seroient ici entr'eux comme les sinus des angles correspondans BXF . Donc aussi,

1°. Tant que la puissance F soutiendra le poids E suivant une direction XF directement opposée à celle XE de ce poids, l'angle BXF se trouvant alors complement (à deux droits) de l'angle BXE , & les sinus de ces deux angles étant ainsi (*Déf. 9. Corol. 2.*) égaux ou le même; le poids E sera aussi pour lors égal à la puissance F , ainsi qu'on l'a déjà vu dans le nomb. 1. du Corol. 19.

2°. Si l'angle BXF du côté de F , se trouve égal à BXE , le poids E sera encore ici égal à la puissance F , ainsi que dans le nomb. 2. du précédent Corol. 19.

3°. Donc (*nomb. 1.*) la puissance F pourroit avoir deux directions différentes, sçavoir, celles des nomb. 1. 2. suivant lesquelles elle pourroit soutenir des poids égaux sur l'appui B du Levier XB ; ce qui revient aussi au nomb. 3. du Corol. 19.

4°. Si la direction XF de la puissance F , se trouvoit confondue avec XB , l'angle BXF se trouvant alors nul ou zero, & conséquemment aussi son sinus, le poids E seroit aussi pour lors nul par rapport à cette puissance F .

c'est-à-dire, absolument zero, si cette puissance F étoit finie ; ou elle infinie, si ce poids étoit fini. Ce qui revient pareillement au nomb. 4 du Corol. 19.

C O R O L L A I R E X X I.

FIG. 153.
& suivantes
jusqu'à 167.

Puisqu'en general dans le cas d'équilibre sur l'appui B de quelque Levier MN que ce soit, entre deux puissances quelconques E, F , la résistance ou la charge de cet appui B est toujours (*part. 3. 4.*) à chacune de ces deux puissances E, F , comme la diagonale AG du parallélogramme RS est à chacun de ses côtez AR, AS , correspondans sur leurs directions prolongées EX, FO ; c'est-à-dire (à cause de $AS = GR$) comme le côté AG du triangle AGR est à ses deux autres côtez AR, GR ; l'on aura (*Lem. 8. Corol. 2.*) cette résistance ou charge de l'appui B à chacune de ces deux puissances E, F , comme le sinus de l'angle ARG , ou de son complement RAS , est à chacun des sinus des angles AGR ou $GAS, \& GAR$; c'est-à-dire, la résistance ou la charge de l'appui B , & les puissances E, F , alors entr'elles comme les sinus des angles RAS, GAS, GAR , ou (à cause que les angles XAO, BAO, BAX , leur sont égaux ou complemens à deux droits) comme les sinus des angles XAO, BAO, BAX .

C O R O L L A I R E X X I I.

Donc le sinus de chacun des trois angles RAS, GAS, GAR , ou XAO, BAO, BAX , étant toujours (*Lem. 8. Corol. 2.*) moindre que la somme des deux autres, tant que l'angle XAO , que font entr'elles les directions des puissances E, F , est fini, les sinus des autres l'étant aussi pour lors, à cause que leur sommet commun A n'est alors qu'à une distance finie du Levier MN ; la charge de l'appui B , résultante du concours de ces puissances E, F , en équilibre (*Hyp.*) sur lui, sera pour lors (*Cor. 21.*) moindre que la somme de ces deux mêmes puissances sur quelque Levier que ce soit, & chacune de ces deux puissances tou-

jours aussi moindre que la somme faite de l'autre & de la charge de l'appui B.

COROLLAIRE XXIII.

Mais si l'angle XAO, que font entr'elles les directions des puissances E, F, est infiniment aigu, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 2.*) si ces directions EX, FO, sont paralleles entr'elles, ou confondues en une qui passe par l'appui B.

1°. Dans tous les Leviers MN, dont l'appui B est dans cet angle XAO, ou dans son opposé au sommet, & dont cet appui B se trouveroit entre les directions des puissances E, F, devenues paralleles entr'elles, ou entre les points X, O, de leur application au Levier suivant des directions qui passent toutes deux par son appui; l'angle RAS s'y trouvant aussi pour lors infiniment aigu, & le total de GAS, GAR, son sinus seroit égal (*Lem. 7.*) à la somme des sinus de ces deux autres. Par consequent alors (*Cor. 21.*) la charge de l'appui B, résultante du concours d'action des puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, est aussi toujours égale à la somme de ces deux puissances, tant que leurs directions y sont paralleles entr'elles, ou (*Lem. 6. Corol. 2.*) que l'angle XAO compris entre leurs directions EX, FO, est infiniment aigu.

Fig. 153.
& suivantes
jusqu'à 162.

2°. Au contraire dans tous les Leviers MN dont l'appui B est hors de l'angle XAO, ou de son opposé au sommet, & cet appui B auroit d'un seul côté les directions des puissances E, F, devenues ici (*Lem. 6. Corol. 2.*) paralleles entr'elles par la supposition qu'on y fait de l'angle XAO infiniment aigu; son complement RAS se trouvant alors (*Déf. 11. Corol.*) infiniment obtus, & total encore de GAS, GAR, dont le premier GAS seroit au contraire alors infiniment aigu, le sinus de cet angle total RAS ne seroit ici égal (*Lem. 7. Corol. 2.*) qu'à la difference dont le sinus de son angle partial GAR surpasseroit le sinus de son autre partial GAS. Par consequent (*Corol. 21.*) la charge de l'appui B, résultante du concours d'action des

Fig. 163.
& suivantes
jusqu'à 167.

puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, n'est ici égale non plus qu'à la différence dont la puissance F y surpasse la puissance E, tant que les directions de ces deux puissances sont paralleles entr'elles.

C O R O L L A I R E X X I V.

FIG. 153.
154. 155.
&c.

Il en va tout autrement, lorsque l'angle XAO devient infiniment obtus, c'est-à-dire (*Déf. 11.*) obtus jusqu'à rendre les directions EX, FO, des puissances E, F, en une seule ligne droite XO, qui passe par leurs points X, O, d'application au Levier MN, & par son appui B, sur lequel ces deux puissances ainsi dirigées, sont ici supposées en équilibre entr'elles, soit que ce Levier soit droit comme dans les Figures ici marquées, ou que courbe à volonté, il ait son appui dans cette droite XO.

FIG. 153.
154. &c.

1°. Dans les Leviers MN qui ont leur appui B sur cette droite XO entre les points X, O, d'application des puissances E, F, à chacun de ces Leviers; l'angle XAO, qu'on suppose ici infiniment obtus, rendant aussi l'angle total RAS infiniment obtus, avec un de ses partiels GAR, GAS, infiniment aigu; le sinus de cet angle total RAS n'y sera égal (*Lem. 7. Corol. 2.*) qu'à la différence des sinus de ces deux angles partiels GAR, GAS. Par conséquent (*Corol. 21.*) la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, & dirigées ici en sens contraires suivant la droite XO, dans laquelle on le suppose, ne sera plus ici égale qu'à la différence de ces deux puissances: de sorte que si ces deux puissances étoient égales entr'elles, la charge de l'appui B en seroit ici entièrement nulle ou zero.

De ce que les puissances E, F, sont ici directement contraires, le seul Ax. 5. fait voir que la charge de l'appui B y sera égale à la différence de ces deux puissances E, F, & dans le sens de la plus forte.

FIG. 153.
154. &c.

2°. Au contraire dans les Leviers MN, dont l'appui B, placé sur la droite XO, n'y est point entre les points X, O, d'application

d'application à chacun de ces Leviers ; l'angle XAO , qu'on suppose ici infiniment obtus, rendant son complément RAS (*Cor. Déf. 11.*) infiniment aigu, le sinus de cet angle total RAS sera ici égal (*Lem. 7.*) à la somme des sinus de ses deux angles partiels GAR , GAS . Par conséquent (*Corol. 21.*) la charge de l'appui B , résultante du concours des deux puissances E , F , en équilibre (*Hyp.*) sur lui, & dirigées ici en même sens suivant la droite XO , dans laquelle on le suppose, sera ici égale à la somme de ces deux puissances E , F .

De ce que ces deux puissances E , F , sont ici dirigées en même sens suivant la même droite XO , le seul *Ax. 4.* fait voir que la charge qui en résulte ici à l'appui B , doit être égale à leur somme, & dirigée en même sens qu'elles suivant leur direction commune XO .

L'angle XAO supposé infiniment aigu dans le *Corol. 23.* confondant quelquefois dans le nomb. 2. du *Corol. 23.* les directions EX , FO , des puissances E , F , en une suivant la droite XO , qui passe par leurs points X , O , d'application au Levier MN ; & cet angle XAO supposé infiniment obtus dans le *Corol. 25.* les y confondant toujours ; on a supposé par tout là que cette direction commune XO passoit par l'appui B sur lequel on y supposoit ces deux puissances en équilibre entr'elles : parce que si cet appui B étoit hors cette droite XO prolongée, comme dans les *Fig. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 165. 166. 167.* cet équilibre entre les deux puissances E , F , de directions ainsi confondues en une, ne pourroit être (*Corol. 7.*) à moins que ces deux puissances ne fussent directement contraires & égales entr'elles ; auquel cas ces deux puissances se soutiendroient mutuellement (*Ax. 3.*) sans aucune résistance de la part de l'appui B .

C O R O L L A I R E X X V.

La charge de l'appui B de quelque Levier MN que ce soit, démontrée dans les précédens *Corol. 21. 22. 23. 24.* par le moyen des sinus des trois angles RAS , GAS , GAR , ou des trois XAO , BAO , BAX , de mêmes sinus

Fig. 153.
& suivantes
jusqu'à 167.

que ceux-là, peut encore se démontrer par le moyen du parallélogramme RS construit comme dans les part. 3. 4. dans lesquelles il revient (*Corol. 1.*) au même.

En effet chacune de ces deux part. 3. 4. fait voir qu'en cas d'équilibre entre deux puissances quelconques E, F, sur l'appui B de quelque Levier MN que ce soit, auquel elles soient appliquées en X, O, suivant quelques directions XE, OF, que ce soient aussi; la charge de cet appui B, résultante du concours d'action de ces deux puissances E, F, sur lui, doit toujours être à chacune d'elles, comme la diagonale AG du parallélogramme RS est à chacun de ses côtes AR, AS, correspondans sur leurs directions; ou (à cause de $AS=RG$) comme le côté AG du triangle ARG est à chacun de ses deux autres côtes AR, RG; & conséquemment que cette charge de l'appui B est toujours moindre que la somme de ces deux puissances E, F, tant qu'elles sont équilibre entr'elles sur cet appui, & que les angles de ce triangle ARG ou du parallélogramme RS sont finis, c'est-à-dire, tant que les directions EX, FO, prolongées de ces deux puissances E, F, font entr'elles un angle fini XAO, ainsi qu'on l'a déjà vû dans le *Corol. 22.*

COROLLAIRE XXVI.

Fig. 153.
& suivantes
jusqu'à 162.

Mais lorsque cet angle XAO est infiniment aigu, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 1. 2.*) lorsque les directions EX, FO, des puissances E, F, sont parallèles entr'elles, ou confondues en une qui passe par l'appui du Levier MN.

1°. Dans tous les Leviers MN, dont l'appui B est dans cet angle XAO, ou dans son opposé au sommet, & dont cet appui B se trouveroit entre les directions des puissances E, F, devenues ici parallèles entr'elles, ou entre les points X, O, d'application de ces puissances au Levier lorsque ces deux points X, O, sont en ligne droite avec son appui B, l'angle RAS du parallélogramme RS, s'y trouvant aussi pour lors infiniment aigu, la diagonale AG de ce parallélogramme RS se trouve alors (*Lem. 9. part. 1.*)

égale à la somme de ses côtez AR, AS. Donc la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, se trouve aussi pour lors (*part.* 3. 4.) égale à la somme de ces deux puissances, ainsi qu'on l'a déjà vû dans le Corol. 23. nomb. 1.

2°. Au contraire dans tous les Leviers dont l'appui B est hors de l'angle XAO, ou de son opposé au sommet, & dont cet appui B auroit d'un seul côté les directions des puissances E, F, devenues ici (*Lem. 6. Corol. 1. 2.*) paralleles entr'elles par la supposition qu'on y fait de l'angle XAO infiniment aigu; son complement RAS se trouvant alors (*Déf. 11.*) infiniment obtus, la diagonale AG du parallelogramme RS ne se trouve plus alors (*Lem. 9. part. 2.*) égale qu'à la difference de ses côtez AR, AS. Donc la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, ne se trouve aussi pour lors égale qu'à la difference de ces mêmes puissances, ainsi qu'on l'a déjà vû dans le Corol. 23. nomb. 2.

FIG. 153.
164. 165.
166. 167.

COROLLAIRE XXVII.

C'est tout le contraire, lorsque l'angle XAO est infiniment obtus, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 4.*) lorsque les directions XE, OF, des puissances E, F, sont en ligne droite XO, qui passe par leurs points X, O, d'application au Levier MN, & que cette droite XO passe par l'appui B, sur lequel ces deux puissances ainsi dirigées, sont ici supposées en équilibre entr'elles. Car,

1°. Dans les Leviers qui ont leur appui B sur cette droite XO entre les points X, O, d'application des puissances E, F, à ces Leviers, l'angle XAO, qu'on suppose ici infiniment obtus, rendant aussi infiniment obtus l'angle RAS du parallelogramme RS, la diagonale AG de ce parallelogramme ne fera pour lors (*Lem. 9. part. 2.*) égale qu'à la difference de ses côtez AR, AS. Donc aussi la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, en équilibre entr'elles (*Hyp.*) sur lui, ne

FIG. 153.
154. &c.

FIG. 153.
154. &c.

fera non plus alors (*part. 3. 4.*) qu'égalé à la différence de ces mêmes puissances, ainsi qu'on l'a déjà vû dans le Corol. 24. nomb. 1.

FIG. 163.
164. &c.

2^o. Au contraire dans les Leviers dont l'appui B placé sur la droite XO, n'y est point entre les points X, O, d'application des puissances E, F, à ces Leviers, l'angle XAO, qu'on suppose ici infiniment obtus, rendant au contraire son complement RAS infiniment aigu, la diagonale AG du parallelogramme RS, fait sous cet angle RAS, sera pour lors (*Lem. 9. part. 1.*) égale à la somme de ses côtez AR, AS. Donc aussi la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, sera pour lors (*part. 3. 4.*) égale à la somme de ces deux puissances, ainsi qu'on l'a déjà vû dans le Corol. 24. nomb. 2.

C O R O L L A I R E XXVIII.

FIG. 153.
& suivantes
jusqu'à 167.

La charge de l'appui B de quelque Levier MN que ce soit, démontrée dans les précédens Corol. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. peut encore se démontrer autrement, en supposant BD, BP, PT, perpendiculaires en D, P, Q, aux trois directions AX, AO : AB, & qui par leur rencontre entr'elles forment le triangle BPT. Car ce triangle ayant (*Lem. 8. Corol. 8.*) les trois côtez BT, BP, PT, entr'eux comme les sinus des angles BAO, BAX, XAO, au travers desquels, ou des complemens desquels ces directions prolongées passeroient, l'on aura aussi (*Cor. 21.*) en cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B d'un Levier quelconque MN, la charge de cet appui B, & ces deux puissances E, F, entr'elles comme les trois côtez PT, BT, BP, de ce triangle BPT, perpendiculaires (*Hyp.*) aux directions de cette charge & de ces deux puissances.

C O R O L L A I R E XXIX.

Par consequent chacun de ces trois côtez du triangle BPT, étant toujours moindre que la somme des deux au-

très, tant que l'angle XAO est fini, tous les siens l'étant aussi pour lors; la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, en équilibre entr'elles (*Hyp.*) sur lui, fera pareillement alors (*Corol.* 28.) toujours moindre que la somme de ces deux puissances, & chacune d'elles toujours moindre aussi que la somme faite de l'autre puissance & de cette charge, ainsi qu'on l'a déjà vu dans les *Corol.* 22. 25.

C O R O L L A I R E X X X.

Mais si l'angle XAO se trouve infiniment aigu par l'éloignement infini de son sommet A, c'est-à-dire (*Lem.* 6. *Corol.* 1. 2.) si les directions XE, OF, des puissances E, F, sont parallèles entr'elles, & conséquemment aussi à la droite BA; cet éloignement infini du point A, rendant pareillement les angles BAX, BAO, infiniment aigus, les trois perpendiculaires (*Hyp.*) BD, BP, PT, à ces trois parallèles XE, OF, BA, seront alors sur une même ligne droite; & conséquemment aussi les trois côtes BT, BP, PT, du triangle BPT, parties de ces perpendiculaires, ou ces perpendiculaires elles-mêmes, seront aussi sur une même ligne droite perpendiculaire à ces trois parallèles: de manière que,

1^o. Dans les Leviers qui auront leur appui B dans l'angle XAO, ou dans son opposé au sommet, les deux côtes BT, BP, seront alors bout à bout sur le troisième PT, confondu avec eux & égal à leur somme par l'arrivée de son point Q en B. Cela seroit aussi par le nomb. 1. du *Corol.* 3. du *Lem.* 9. en ce que l'angle XAO. (*Hyp.*) infiniment aigu, rend son complément PBD ou PBT infiniment obtus dans le triangle PBT, ce nomb. 1. du *Corol.* 3. du *Lem.* 9. fait voir qu'alors son côté PT opposé à cet angle infiniment obtus, sera égal à la somme de ses deux autres côtes BT, BP. Donc la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, sera pour lors (*Corol.* 28.) égale à la somme de ces deux puissances dans les Leviers dont l'appui sera

Fig. 153.
& suivantes
jusqu'à
162.

dans l'angle XAO, ainsi qu'on l'a déjà vû dans le nomb. 2. des Corol. 23. 26.

FIG. 163.
164. 165.
166. 167.

2°. Dans les Leviers qui auront leur appui B au dehors de l'angle XAO, ou de son opposé au sommet, le cas present de cet angle XAO infiniment aigu, ou (*Lem. 6. Corol. 1. 2.*) des directions AX, AB, AO, paralleles entr'elles, rendant bout à bout les deux côtez BT, PT, du triangle BPT sur son troisiéme BP alors confondu avec eux & égal à leur somme par l'arrivée de leur concours T sur lui, Q arrivant aussi pour lors en B, & consequemment le côté PT sera pour lors égal à la difference des deux autres. Cela seroit aussi par le nomb. 2. du Corol. 3. du Lem. 9. en ce que l'angle infiniment aigu XAO, rendant aussi infiniment aigus les angles OAB, PBT, BPT, & le triangle PBT se trouvant alors avoir deux angles infiniment aigus en B, P, & un infiniment obtus en T; ce nomb. 2. du Corol. 3. du Lem. 3. fait voir qu'alors le côté BT de ce triangle sera égal à la difference de ses deux autres côtez BP, PT. Donc la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, sera pour lors (*Corol. 28.*) égale à la difference de ces deux puissances dans les Leviers dont il s'agit ici, ainsi qu'on l'a déjà vû dans le nomb. 2. des Corol. 23. 26.

COROLLAIRE XXXI.

FIG. 153.
154. 163.
164. &c.

Au contraire, lorsque l'angle XAO est infiniment obtus, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 4.*) lorsque les directions XE, OF, des puissances E, F, font la ligne droite XO, qui passe par leurs points X, O, d'application au Levier MN, & que cette droite XO passe par l'appui B, sur lequel ces deux puissances ainsi dirigées sont supposées en équilibre entr'elles. Alors,

FIG. 153.
154. &c.

1°. Dans les Leviers qui ont leur appui B dans l'angle XAO, sur la droite XO, entre les points X, O, d'application des puissances E, F, à chacun de ces Leviers, l'angle XAO, que l'on suppose devenir infiniment obtus,

rendant ainsi (*Déf. 11. Corol.*) son complément PBD ou PBT infiniment aigu, & les deux autres angles en P, T, du triangle BPT, un encore infiniment aigu, & l'autre infiniment obtus; le nomb. 2. du Corol. 3. du Lem. 9. fait voir que le côté PT de ce triangle BPT, seroit pour lors égal à la différence de ses deux autres côtez BP, BT. Cela seroit encore en considérant que lorsque l'angle PBT est infiniment aigu, ses côtez, BP, BT, se couchent (*Lemme 6. Corol. 3.*) l'un sur l'autre, & le troisième côté PT du triangle BPT sur l'excès du plus grand de ces deux-là, desquels par conséquent ce troisième PT ne doit être alors que la différence. Donc (*Corol. 28.*) dans ces sortes de Leviers la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, supposées entre-elles en équilibre sur lui suivant des directions qui feroient entr'elles un angle XAO infiniment obtus, ne seroit alors égale qu'à la différence de ces deux puissances, ainsi qu'on l'a déjà vû dans les nomb. 1. des Corol. 24. 27.

2°. Dans les Leviers qui ont leur appui B au dehors de l'angle XAO, sur la droite XO, ayant d'un seul côté les points X, O, d'application des puissances E, F, à chacun de ces Leviers, l'angle XAO, que l'on suppose devenir infiniment obtus, rendant ainsi l'angle PBT infiniment obtus par les positions perpendiculaires en B de BP au dessous, & de BT au dessus de XO prolongée, & les deux autres angles en P, T, du triangle BPT, infiniment aigus; le nomb. 1. du Corol. 3. du Lem. 9. fait voir que le côté PT de ce triangle BPT, seroit pour lors égal à la somme de ces deux autres côtez BT, BP. Donc (*Cor. 28.*) dans ces sortes de Leviers la charge de l'appui B, résultante du concours des puissances E, F, supposées entre-elles en équilibre sur lui suivant des directions qui feroient entr'elles un angle XAO infiniment obtus, seroit alors égale à la somme de ces deux puissances, ainsi qu'on l'a déjà vû dans les nomb. 2. des Corol. 24. 27.

FIG. 163
164. &c.

COROLLAIRE XXXII.

Suivant quelques directions EX, FO, que les puissances E, F, appliquées en X, O, à quelque Levier MN que ce soit, fassent équilibre entr'elles sur son appui B placé où l'on voudra; il suit des précédens Corol. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. que la plus grande charge qui en puisse résulter à cet appui B, c'est (*nomb. 1. des Corol. 23. 24. 26. & nomb. 2. des Corol. 24. 27. 31.*) d'être égale à la somme de ces deux puissances; & que la moindre c'est (*nomb. 1. des Corol. 24. 27. 31. & nomb. 2. des Corol. 23. 24. 26.*) d'être égale à leur différence; sçavoir, l'une & l'autre de ces deux charges de l'appui B, lorsque les directions des puissances E, F, sont paralleles entr'elles ou en ligne droite, qui passe par cet appui conformément à la réflexion qui suit le Corol. 24. Quant aux autres directions de ces deux puissances E, F, les Corol. 22. 25. 29. font voir chacun que la charge qui en résultera à l'appui B, sur lequel on les suppose en équilibre entr'elles, est toujours moyenne entre ces deux extrêmes, c'est-à-dire, toujours moindre que la somme de ces deux puissances, & toujours plus grande que leur différence; & ce d'autant plus grande que l'angle RAS se trouve plus aigu, la diagonale AG du parallelogramme RS en étant d'autant plus grande par rapport à ses côtez AR, AS, & cette charge étant alors (*part. 3. 4.*) aux puissances E, F, comme cette diagonale AG est à ces mêmes côtez AR, AS.

COROLLAIRE XXXIII.

FIG. 163.
164. &c.

Lorsque les directions XE, OF, des puissances E, F, sont en ligne droite XO, dans laquelle prolongée se trouve l'appui B du Levier auquel on les suppose appliquées; non seulement la résistance (*Hyp.*) invincible de cet appui alors directement opposé à chacune de ces puissances, les met toujours (*princ. gener. Corol. 1.* en équilibre ou en repos

pos sur lui, quelque rapport qu'elles ayent entr'elles; mais encore,

1°. Si c'est par la réduction de l'angle XAO à l'infiniment aigu, que les directions XE, OF, des puissances E, F, se confondent ainsi en une suivant XO par l'appui B; la charge de cet appui est alors égale (*nomb. 1. des Corol. 23. 26. 30.*) à la somme de ces deux puissances, quand cet appui B est entre leurs points X, O, d'application au Levier, comme dans les Fig. 153. 154. & seulement égale (*nomb. 2. des Corol. 23. 26. 30.*) à leur différence, quand il n'y est pas, comme dans les Fig. 163. 164. aussi ces deux puissances E, F, agissent-elles sur cet appui B en même sens dans le premier cas, & en sens directement contraire dans le second.

2°. Si c'est par la réduction de l'angle XAO à l'infiniment obtus, que les directions XE, OF, des puissances E, F, se confondent en une suivant XO qui passe par l'appui B; la charge de cet appui n'est égale (*nomb. 1. des Corol. 24. 27. 31.*) qu'à la différence de ces deux puissances, quand cet appui B est entre leurs points d'application X, O, comme dans les Fig. 153. 154. & égale (*nomb. 2. des Corol. 24. 27. 31.*) à leur somme, quand il n'y est pas, comme dans les Fig. 163. 164. Aussi ces deux puissances E, F, sont-elles ici directement contraires dans le premier cas, & en même sens dans le second.

COROLLAIRE XXXIV.

Suivant le Corol. 28. les puissances E, F, dirigées à volonté, & en équilibre entr'elles sur l'appui B d'un Levier quelconque MN, sont alors entr'elles comme les côtes BT, BP, qui leur répondent dans le triangle BPT, c'est-à-dire alors, $E.F.::BT.BP.$ Mais le Corol. 2. donne aussi pour lors $E.F.::BP.BD.$ Donc en cas d'équilibre dans toutes sortes de Leviers, & de directions de puissances, on a toujours $BT.BP.::BP.BD.$ Par conséquent en menant la droite DP, les triangles PBT, DBP, qui ont l'angle commun en B, sont toujours alors semblables en-

FIG. 153.
& suivantes
jusqu'à 167.

tr'eux ; & conséquemment les trois côtez DP, BP, BD, du second DBP de ces triangles, sont toujours alors entr'eux comme les trois côtez PT, BT, BP, qui le sont homologues dans le premier PBT. Or en ce cas d'équilibre des puissances E, F, sur l'appui B, la charge qui en résulte à cet appui, & ces deux puissances E, F, sont toujours entr'elles (*Corol. 28.*) comme les trois côtez PT, BT, BP, de ce triangle PBT. Donc cette charge de l'appui B, & ces deux puissances E, F, seront toujours aussi pour lors entr'elles comme les trois côtez DP, BP, BD, du triangle DBP, qui n'a que deux côtez BD, BP, perpendiculaires (*Corol. 2.*) à deux EX, FO, des trois directions EX, FO, AB, des puissances E, F, & de la charge de l'appui B, résultante du concours d'action de ces deux puissances sur lui, au lieu que (*Corol. 28.*) l'autre triangle PBT à ses trois côtez BT, BP, PT, perpendiculaires à ces trois directions.

On voit que toutes les différentes valeurs de charges d'appuis de Leviers quelconques déterminées depuis le Corol. 21. jusqu'ici, pour toutes les directions possibles des puissances en équilibre sur eux deux à deux de directions quelconques, pourroient encore se déterminer par le moyen du triangle DBP, comme l'on a fait par le moyen de son semblable PBT dans les Corol. 28. 29. 30. 31. Mais en voilà assez, & peut-être trop pour la quantité ou valeur de ces sortes de charges. Voici présentement quelles en sont les directions, c'est-à-dire, en quel sens, ou vers quels côtez les appuis des Leviers en sont chargés.

C O R O L L A I R E X X X V.

On a vû dans les démonstrations des part. 2. 3. 4. qu'en cas d'équilibre entre deux puissances quelconques E, F, sur un appui de quelque Levier que ce soit, auquel ces deux puissances seroient appliquées en deux points X, O, aussi quelconques suivant quelques directions EX, FO, que ce fussent ; la charge de cet appui B, résultante du concours d'action de ces deux puissances,

doit toujours être de A vers G suivant la diagonale AG d'un parallélogramme RS fait de côtez AR, AS, pris sur les directions de ces puissances, laquelle diagonale AG prolongée passe par l'appui B. Donc,

1°. En general, quelque soit l'angle XAO compris entre ces directions prolongées EX, FO, des puissances E, F, en équilibre entr'elles (*Hyp.*) sur l'appui B; la droite menée du sommet A de cet angle par cet appui B, sera la direction de sa charge de A vers G, résultante du concours de ces deux puissances. Donc aussi en particulier,

2°. Lorsque cet angle XAO sera infiniment aigu, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 1. 2.*) lorsque les directions EX, FO, des puissances E, F, seront paralleles entr'elles, ou confondues en une, qui passe par l'appui B; cette direction AB de la charge de cet appui B, encore de A vers G, sera aussi parallele à celles-là (*Lem. 6. Corol. 1. 2.*) ou confondue avec elles, & dans le sens de ces deux puissances E, F, si elles tirent vers le même côté, ou dans le sens de la plus voisine de cet appui, si elles tirent vers des côtez differens.

3°. Lorsque l'angle XAO sera infiniment obtus, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 4.*) lorsque les directions EX, FO, des puissances E, F, seront aussi en ligne droite XO, qui passe par leurs points X, O, d'application au Levier MN, & par l'appui B (*Ax. 5.*) de chacun des Leviers sur lesquels l'équilibre ici supposé seroit alors possible sur cet appui: la direction AB de la charge de A vers G de ce même appui B, se trouvera pour lors (*Lem. 6. Cor. 3. 4.*) confondue dans cette même droite XO avec les directions EX, FO, de ces deux puissances E, F, & dans le sens (*Ax. 5.*) de la plus forte d'entr'elles, si elles sont contraires l'une à l'autre, ou dans le sens de toutes les deux, si elles s'accordent à tirer vers le même côté.

C O R O L L A I R E XXXVI.

Il suit presentement des Corol. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. qu'en cas d'é-
V u i j

équilibre sur l'appui B d'un Levier quelconque MN, entre deux puissances aussi quelconques E, F, appliquées à quelques points X, O, qu'on voudra de ce Levier & dirigées aussi comme l'on voudra.

1°. Tant que l'angle XAO compris entre leurs directions EX, FO, prolongées sera fini, la direction de la charge résultante du concours d'action de ces deux puissances E, F, sur l'appui B de ce Levier, sera (*Corol. 35. nomb. 1.*) de A vers G suivant AB; & cette charge sera toujours alors (*Corol. 32.*) moyenne entre la somme de ces deux puissances & leur différence; c'est-à-dire, toujours moindre que leur somme, & toujours plus grande que leur différence, & ce d'autant plus grande (*Cor. 25.*) que l'angle RAS (égal à XAO, ou à son complément) sera plus grand.

2°. Lorsque l'angle XAO est infiniment aigu, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 1. 2.*) lorsque les directions EX, FO, des puissances E, F, sont parallèles entr'elles ou confondues en une, qui passe par l'appui B, la direction de la charge résultante du concours d'action de ces deux puissances sur cet appui B de leur équilibre supposé, sera encore (*Corol. 35. nomb. 2.*) de A vers G suivant AB, alors parallèle à leurs directions EX, FO, ou confondues avec elles en une, qui passera (*Ax. 5.*) par l'appui B; & soit que ces directions des puissances E, F, soient parallèles entr'elles, ou confondues en une, qui passe par cet appui B, la charge sera toujours alors (*nomb. 1. des Corol. 23. 26. 30.*) égale à la somme de ces deux puissances E, F, si cet appui B est entre leurs directions ou entre leurs points X, O, d'application au Levier, & seulement égale à leur différence (*nomb. 2. des Corol. 23. 26. 30.*) lorsqu'il n'y est pas.

3°. Lorsque l'angle XAO est infiniment obtus, c'est-à-dire (*Lem. 6. Corol. 4.*) lorsque les directions EX, FO, des puissances E, F, sont en ligne droite XO, qui passe par les points X, O, d'application de ces deux puissances au Levier MN, & par l'appui B (*Ax. 5.*) de tous les Le-

vers dans lesquels l'équilibre supposé entre ces deux puissances E, F, seroit alors possible sur cet appui B ; la charge résultante de leur concours d'action sur ce même appui B de leur équilibre supposé, aura (*Lem. 6. Cor. 3. 4.*) sa direction confondue dans XO avec les leurs, dans le sens de la plus forte d'entr'elles. (*Ax. 5.*) si elles sont contraires l'une à l'autre, & fera pour lors égale (*Corol. 24. nomb. 1.*) à leurs différences ; ou si ces deux puissances E, F, s'accordent à tirer vers le même côté, cette charge de l'appui B aura pour lors (*Lem. 9. Corol. 2.*) sa direction vers ce côté-là dans le sens de toutes ces deux puissances, & fera pour lors (*Corol. 24. nomb. 2.*) égale à leur somme.

En 1687. que le *Projet* de ceci fut publié, personne (que je sçache) n'avoit encore démontré la charge ni la direction des points d'appuis des Leviers : il ne paroît pas même qu'il soit aisé de le faire par les principes ordinaires, où l'on ne conclud l'équilibre entre deux puissances ou deux poids appliqués à un Levier, que de leur égale opposition à être circulairement enlevés l'un par l'autre autour de l'appui fixe de ce Levier ; au lieu que c'est de leur accord & de leur réunion d'action sur cet appui que l'on conclud ici cet équilibre entr'eux sur ce même appui : considération qui renferme nécessairement celle de la charge & de la direction de cet appui, lesquelles n'entrent point du tout dans les principes ordinaires. Cependant sans la connoissance de cette charge & de cette direction des appuis des Leviers, il y a bien des Problèmes qu'on ne sçauroit résoudre : par exemple, sans la connoissance de la direction des appuis il n'est pas possible de démontrer quelles devroient être les directions de deux puissances quelconques pour faire équilibre entr'elles sur quelque Levier que ce soit, dont l'appui seroit une sphere ; ni sur combien de points de ce Levier ainsi appuyé, il seroit possible que ces mêmes puissances fussent équilibre en changeant seulement leurs directions. Il n'est pas possible non plus, sans la connoissance de la direction & de la charge des appuis des Leviers de trouver le point d'appui de celui auquel tant de puissances qu'on voudra soient appliquées ; pour toutes

les directions possibles dans lesquelles on les peut supposer ; ni deux puissances étant données avec leurs directions & leurs points d'application à un Levier, de trouver quelle doit être la direction & point d'application d'une troisième puissance aussi donnée, pour que toutes trois ensemble fassent équilibre entr'elles sur quelque point donné que ce soit de ce Levier, & pour quelque direction que ce soit de ce point d'appui. Il en sera de même de toute autre puissance sur les Leviers dont la solution dépendra de la détermination de la charge & de la direction des appuis.

Depuis 1687 que cette réflexion fut faite dans le Projet de ceci, il a paru une Mécanique, dans laquelle, après avoir démontré que deux poids en équilibre sur un Levier droit perpendiculaire aux directions de ces poids qu'on y suppose parallèles entr'elles, & d'un appui posé entr'eux, sont toujours l'un à l'autre en raison reciproque des bras de ce Levier auquel ces deux poids sont ainsi appliquez ; & après avoir passé de-là aux autres Leviers, & aux autres directions des puissances qui y sont appliquées : on est enfin arrivé par des substitutions & par des transformations de Leviers, à des raisons composées, qui ont enfin donné celle qui se présente tout d'un coup ici (Corol. 25.) & dans le Projet de ceci (pag. 61. Corol. 4.) de la charge de l'appui à chacune des deux puissances qu'il soutient en équilibre entr'elles. Ce qui justifie ce que l'on vient de dire au commencement de cette réflexion-ci, comme on l'avoit déjà dit dans la pag. 64. du Projet de ceci : qu'il ne paroît pas aisé de démontrer la charge ni la direction des points d'appuis des Leviers par les principes ordinaires : choses qu'on vient de voir sauter aux yeux, & s'offrir d'elles-mêmes comme conséquences immédiates du principe qu'on suit ici.

COROLLAIRE XXXVII.

Si l'on suppose presentement que tous les points de chaque corps sont chacun d'une pesanteur par tout la même, à quelque distance qu'il se trouve du centre de la Terre,

Par lequel toutes ces pesanteurs tendent toujours, & que ce corps s'en approche ou s'en éloigne en se meuvent toujours parallèlement à lui-même, c'est-à-dire, sans tourner aucunement sur lui-même, & en gardant toujours une même situation de tous ses points par rapport à ce centre de la Terre : les part. 3. 4. font voir que ce corps pesera d'autant moins qu'il sera plus près de ce même centre.

Car si dans les Fig. 154. 156. 158. 160. les pesanteurs des points X, O, d'un corps quelconque MN, sont représentées par des puissances E, F, égales à ces pesanteurs, & dirigées comme elles au centre de la Terre, lequel soit ici A ; les part. 3. 4. font, dis-je, voir que la charge ou pesanteur qui en résultera à ce corps MN, sera à chacune des puissances E, F, ou des pesanteurs qu'elles expriment dans les points X, O, comme la diagonale AG du parallélogramme RS, est à chacun de ses côtés AR, AS, pris sur les directions de ces puissances en même raison qu'elles. Or il est manifeste qu'à mesure que le corps MN, mû parallèlement à lui-même, approchera du point fixe A, plus l'angle RAS augmentera, & plus au contraire la diagonale AG du parallélogramme RS diminuera, les côtés AR, AS, demeurant toujours les mêmes. Donc aussi plus ce corps MN, toujours parallèle à lui-même, approchera de ce centre A de la Terre, moins sera grande la charge ou la pesanteur qui lui résultera du concours de celles de ses points X, O, vers le point A. La même chose se démontrera de tous les autres points de ce corps quelconque MN, ainsi pris deux à deux. Donc tout ce corps, toujours (*Hyp.*) en même situation de ses parties par rapport au centre A de la Terre, quoiqu'à différentes distances de ce centre, recevra d'impression ou de pesanteur vers ce même centre par le concours des pesanteurs constantes de tous les points ou parties toujours tendantes (*Hyp.*) à ce centre A, sera toujours d'autant moindre, c'est-à-dire, qu'il sera toujours d'autant moins pesant, quoiqu'en raison différente,

Fig. 154.
156 158.
160.

qu'il sera plus près de ce même centre ; sa situation ou disposition par rapport à ce centre, demeurant du reste toujours la même. Ainsi une sphere ayant toujours même situation de toutes ses parties par rapport au centre de la Terre, quelque tour qu'elle fasse sur elle-même, devroit toujours être, suivant ceci, d'autant moins pesante qu'elle en feroit plus près.

C O R O L L A I R E X X X V I I I .

Mais si la situation des parties du corps MN tout autre que spherique, changeoit par rapport au centre de la Terre, en faisant quelque mouvement autour d'un de ses points quelconques B ; quand même ce point B demeureroit à même distance BA du centre A de la Terre, ce corps MN ne laisseroit pas d'en devenir plus leger ou plus pesant, selon que les angles XAO ou RAS, faits des directions concourantes des pesanteurs particulieres & constantes de ses points pris deux à deux, en deviendroient plus grands ou plus petits. Tout cela suit encore des part. 3. 4. de même que le précédent Corol. 37.

C O R O L L A I R E X X X I X .

Au contraire, si au lieu de directions concourantes des poids, on les suppose à l'ordinaire paralleles entre-elles, & les points de ces corps encore de pesanteurs toujours les mêmes dans chacun d'eux, à quelques distances qu'ils se trouvent du centre de la Terre, ou de tout autre point auquel on supposât que chacun de ces poids tendent ; les nomb. 1. des Corol. 23. 26. font voir que ces poids entiers seront aussi pour lors chacun de même pesanteur à toute distances de ce centre, quelque situation qu'ils prennent par rapport à lui : puisque suivant ces nomb. 1. des Corol. 23. 26. la pesanteur ou la charge de chacun de ces poids, résultante du concours des pesanteurs particulieres de toutes ses parties, seroit alors égale à la somme de toutes les pesanteurs particulieres, lesquelles supposées constantes, la rendroient aussi
par

partout la même, & d'une direction toujours (Corol. 35.
nom. 2.) parallèle aux leurs.

C O R O L L A I R E X L.

De cette hypothese des directions des poids paralleles entr'elles, & des pesanteurs toujours les mêmes dans chacune de leurs parties où points, & conséquemment aussi (Corol. 39.) de leurs pesanteurs entieres toujours les mêmes à toutes sortes de distances de la Terre ou de son centre; deux de ces poids quelconques E, F, appliquez en X, O, à un Levier quelconque MN, qui n'en auroit aucune, & en équilibre sur un appui B posé entr'eux dans un point commun à ce Levier & à la droite XO, qui joint aussi leurs points d'application à ce Levier, demeureroient toujours en équilibre sur cet appui B, quelque variété de situation *mn* qu'on donnât ensuite à ce Levier, les directions *ex*, *fω*, des poids E, F, alors en *e*, *f*, y étant encore paralleles entr'elles. FIG. 171.

Car puisque les directions EX, FO, *ex*, *fω*, sont (Hyp.) toutes paralleles entr'elles, si l'on mene par l'appui B la droite DP perpendiculaire aux deux premières EX, FO, en D, P, elle le sera aussi aux deux autres *ex*, *fω*, en *d*, *p*; & les triangles tant BDX, BPO, que Bdx, Bpω, seront ici semblables entr'eux. Donc Bp. Bd :: Bω. Bx :: BO. BX :: BP. BD. Or l'équilibre supposé entre les poids E, F, sur l'appui B dans la premiere situation MN du Levier, donne (Corol. 2.) BP. BD :: E. F (Hyp.) :: *e*. *f*. Donc aussi *e*. *f* :: Bp. Bd. Par conséquent (Corol. 3.) ces deux poids E, F, en *e*, *f*, dans toute autre situation *mn* que la premiere supposée MN de ce Levier, y resteront toujours aussi en équilibre sur le même appui B.

Donc dans cette hypothese des directions des poids paralleles entr'elles, deux quelconques de pesanteurs constantes une fois en équilibre sur un Levier aussi quelconque MN, dont l'appui B soit dans la droite XO, qui joint leurs points X, O, d'application à ce Levier, demureront toujours en équilibre sur cet appui, quelque

variété de situations *mm* qu'on donne à ce Levier : c'est-à-dire, dans toutes les situations possibles de ce même Levier.

La même chose se trouvera encore démontrée d'une autre maniere dans le Corol. 6. du Th. 23.

C O R O L L A I R E X L I.

Ainsi le point B, qui (*Corol. 2. 3.*) divise la droite DP, & conséquemment aussi le Levier droit XO, en bras reciproques aux poids E, F, appliquez à leurs extrêmités, fera ici (*Déf. 14.*) le centre de gravité du Levier droit XO ainsi chargé en X, O, des poids E, F, de pesanteurs (*Hyp.*) constantes, & de directions (*Hyp.*) paralleles entr'elles ; & conséquemment (*Corol. 35. nomb. 2.*) la direction de ce centre de gravité ou de sa charge doit être suivant la droite BG parallele à celles-là, & cette charge (*nomb. 1. des Cor. 23. 26. 30.*) doit être égale à la somme de ces poids.

C O R O L L A I R E X L I I.

Suivant cela, si l'on imagine un corps ou poids quelconque soutenu en repos par un de ses points aussi quelconque, la direction de sa pesanteur résultante du concours des pesanteurs particulieres de toutes les parties, passant toujours (*part. 2.*) par ce point d'appui ou de suspension, suivant une ligne (*Corol. 35. nomb. 2.*) parallele aux directions (*Hyp.*) paralleles entr'elles de toutes ces pesanteurs particulieres, & cette pesanteur totale du corps en question se trouvant ainsi toute réunie dans cette ligne d'équilibre, comme si elle seule l'avoit toute entiere ; celui des points mitoyens de cette ligne, sur lequel appuyé ou suspendu elle demeureroit en équilibre ou en repos, fera aussi celui sur lequel le corps ou le poids entier demeureroit de même en équilibre ou en repos. Or les pesanteurs particulieres de toutes les parties de cette ligne, étant (*Hyp.*) toujours ici les mêmes pour chacune, & de directions toutes paralleles entr'elles ; l'équilibre de cette

même ligne se conserveroit toujours sur ce point (*Corol.* 40.) quelque situation qu'on donnât à cette ligne autour de cet appui. Donc l'équilibre du corps ou du poids se conserveroit aussi toujours ici sur ce point dans toutes les situations possibles qu'on pourroit donner à ce corps autour de ce même appui. Par conséquent dans tous les points où toutes les parties auroient des pesanteurs par tout les mêmes pour chacune , & toujours dirigées suivant des lignes toutes paralleles entr'elles , il y auroit toujours un point par où ce corps étant suspendu ou appuyé , toutes ses parties demeureront toujours en repos , quelque situation qu'on leur donnât par rapport au lieu vers lequel il tendroit. C'est ce point qu'on appelle d'ordinaire (*Déf.* 14.) le *centre de gravité* de ce corps ou de ce poids.

On verra dans le Corol. 8. du Th. 23. qu'un tel centre de gravité se trouveroit aussi dans les poids de directions concourantes au centre de la Terre , pourvu que leurs parties soient ainsi dirigées par des pesanteurs proportionnelles dans chacune aux différentes distances d'elles à ce centre. Mais si avec de telles directions les pesanteurs en étoient constantes & toujours les mêmes , on va voir dans le Corol. 45. de ce Théoreme-ci qu'un tel poids n'auroit point de tel centre de gravité.

COROLLAIRE XLIII.

Si presentement on suppose que les directions des poids ou des parties de chacun , concourent en quelque point , par exemple , au centre de la Terre , & que leurs pesanteurs soient encore par tout les mêmes pour chacun d'eux à toutes distances de ce centre ; il arrivera le contraire du *Corol.* 40. supposé dans le précédent *Corol.* 42. c'est-à-dire , que ces poids ne pourront être en équilibre deux à deux sur un même point d'appui d'un Levier posé entre leurs points d'application à ce Levier dans la droite qui joindra ces deux points , que dans une seule situation de ce même Levier , au lieu que suivant le *Corol.* 40. cet équilibre se conserveroit dans toutes les situations possi-

bles de ce Levier, si ces poids avoient des directions toujours parallèles entr'elles.

FIG. 172.

Pour voir le premier comme l'on a déjà vû le second dans le Corol. 40. soient deux poids quelconques E, F , de pesanteurs constantes, & constamment dirigées vers le point A , qui soit (si l'on veut) le centre de la Terre; lesquels poids soient appliquez à deux points quelconques X, O , du Levier MN de figure quelconque, & en équilibre entr'eux dans la situation MN de ce Levier sur un appui B placé (comme dans le Corol. 40.) entre ces deux points d'application dans un qui soit commun au Levier, & à la droite XO qui joint ces deux-là. Si l'on change cette situation MN de ce Levier en telle autre mn qu'on voudra, quelque soit le bras abaissé Bx par rapport à l'élevé $B\omega$, ces deux poids E, F , alors en e, f , n'y seront plus en équilibre sur l'appui B ; au contraire l'abaissé en e vers A , emportera toujours l'autre, jusqu'à ce que la droite XO , ou $x\omega$, qui joint leurs points d'application à ce Levier, soit dans la droite BA menée de l'appui B au centre A de la Terre, sçavoir, X ou x en R , & O ou ω en S plus éloigné que R du point A .

Car si du point B on imagine BD, BP, Bd, Bp , perpendiculaires sur les directions $XA, OA, xA, \omega A$, l'on aura. (Lem. 15.) $BP.BD > Bp.Bd$. Mais l'équilibre supposé entre les poids E, F , sur l'appui B dans la situation MN du Levier auquel ils sont appliquez, donne (Corol. 2.) $BP.BD :: E, F$ (Hyp.) $:: e, f$. Donc aussi $e, f > Bp, Bd$. Par conséquent le poids E en e lorsque le Levier est en mn , l'emportera (Corol. 5.) sur le poids F alors en f , & toujours de même jusqu'à ce que OX ou ωx soit en BA , dans laquelle situation ces deux poids seront enfin arrêtez (Ax. 3. & Corol. 1. du princ. gener.) par l'appui B alors directement opposé à chacun d'eux.

COROLLAIRE XLIV.

Puisque, lorsque le Levier MN , sur l'appui B duquel les poids E, F , faisoient (Hyp.) équilibre en cette situation MN ,

est passé en mn , & ces poids en e, f , avec des directions toujours concourantes en A , & des pesanteurs toujours les mêmes qu'auparavant ; il en résulte (*Corol.* 43.) $e, f > Bp. Bd$. C'est-à-dire (en prenant AB pour sinus total) e à f en plus grande raison que le sinus de l'angle $BA\omega$ au sinus de l'angle BAx ; & ces raisons devant être égales (*Corol.* 2.) pour l'équilibre entre ces deux poids e, f , sur le point B du Levier en mn . Il est visible que pour cet équilibre en mn , l'appui de ce Levier devoit être placé en B, x , sur un point b , qui rendît le sinus de l'angle $BA\omega$ au sinus de l'angle BAx comme e à f .

De sorte que si ces deux poids e, f , ou (*Hyp.*) E, F , étoient égaux entr'eux, les angles $BA\omega, BAx$, devoient aussi l'être entr'eux pour que ces poids de directions concourantes A , pussent faire équilibre entr'eux en mn sur l'appui b ; ce qui rendroit alors $bx.b\omega :: Ax. A\omega$. Donc pour mettre ainsi en équilibre sur un Levier de situation quelconque mn , deux poids égaux e, f , de directions concourantes en A ; l'appui de ce Levier devoit être placé dans un point b qui divisât la droite $x\omega$ en deux parties $bx, b\omega$, qui fussent entr'elles comme les distances $xA, \omega A$ du centre A des directions de ces deux poids aux points x, ω , de leurs applications à ce Levier.

D'où l'on voit que lorsque ce Levier, s'il est droit, ou la droite $x\omega$ seroit en RS sur la droite AB , ainsi qu'il y doit arriver (*Corol.* 43.) lorsque de sa situation MN ou les poids E, F , faisoient (*Hyp.*) équilibre entr'eux sur son appui B , on l'aura fait passer en mn ; l'appui b qui les y soutiendrait en équilibre, seroit alors sur AB en un point β , qui avec le point R diviseroit la droite AS en trois parties $AR, R\beta, \beta S$, telles qu'on auroit alors la toute $AS. AR :: \beta S. \beta R$.

Pour trouver ce point β sur AB , il n'y a qu'à mener par S, R , deux parallèles quelconques SG, RH , rencontrées en G, H , par une droite quelconque AG , menée du point A , & après avoir pris $RK=RH$ sur HR prolongée vers K , soit menée la droite GK qui rencontre AS .

en β ; ce point β fera le requis ici : puisque cette construction rendant les triangles tant SAG , RAH , que SG , $R\beta K$, semblables entr'eux deux à deux, l'on aura $AS. AR :: SG. RH$ (*Hyp.*) :: $SG. RK :: \beta S. \beta R$. c'est-à-dire, $AS. AR :: \beta S. \beta R$. ainsi qu'il étoit requis.

COROLLAIRE XLV.

Il suit de ces deux derniers Corol. 43. 44. que si toutes les parties d'un poids quelconque non sphérique, étoient de pesanteurs toujours les mêmes pour chacune à toutes distances du centre de la Terre, auquel elles tendissent toutes constamment; il n'y auroit aucun point dans ce corps par lequel appuyé ou suspendu ailleurs qu'au centre de la Terre, ce corps demeurât en repos dans plus d'une situation; puisque dans quelque situation qu'il y fût en repos sur celui de ses points qu'on voudra, dès qu'on le feroit tourner sur ce point, sa partie abaissée vers le centre de la Terre l'emporteroit toujours (*Corol.* 43.) sur l'autre qu'on en auroit ainsi éloignée. D'où l'on voit que dans la présente hypothèse ce corps n'auroit aucun *centre de gravité* pris à l'ordinaire dans le sens de la Déf. 14. supposé, dis-je, que toutes les parties fussent chacune d'une pesanteur par tout la même, & qu'elles tendissent toujours toutes au centre de la Terre.

On excepte ici la Sphere, parce que quoiqu'à distances différentes du centre de la Terre, elle & ses parties eussent (*Corol.* 37.) des pesanteurs successivement différentes dans la présente hypothèse des directions des poids concourantes à ce centre; les dispositions semblables de toutes ses parties autour du sien, la rendroient toujours entière de même position ou situation par rapport à celui-là, quelque mouvement qu'on lui donnât autour du sien appuyé ou suspendu, ses parties suppléant alors les unes aux autres à mesure qu'elles auroient les mêmes positions & les mêmes pesanteurs que celles auxquelles elles succederoient.

Fig. 173.

Il est vrai qu'en regardant les secteurs αBx , αBX , $\alpha B\omega$, ωBO , OBx , de la Sphere $\alpha XO\omega x$, comme autant de divers



corps semblables entr'eux, qui dans l'hypothese du Corol. 42. auroient tous leurs centres b de gravité à distances égales du centre B de grandeur de cette Sphere ; tous ces centres particuliers b de gravité seroient à la circonference d'une moindre Sphere $bbbb$ concentrique à celle-là. Mais outre que nous ne sommes pas ici dans l'hypothese de ce Corol. 42. la raison précédente fait voir que le centre B de grandeur de la Sphere $xx\omega ox$, chargé de tous les centres particuliers b de gravité, en seroit encore lui-même un centre commun de gravité sur lequel appuyé ou soutenu ils demeureroient tous en équilibre ; & conséquemment aussi que cette Sphere seroit encore en repos dans tout ce qu'elle pourroit avoir de situations différentes autour de son centre fixe B . Ainsi dans la presente hypothese des directions des poids concourantes au centre de la Terre, ou en tel autre point qu'on voudra de l'Univers, ce centre B de grandeur de la Sphere $xx\omega ox$, en doit aussi être le centre de gravité pris au sens ordinaire de la Déf. 14. comme il l'est (Corol. 42.) dans l'hypothese de ces directions paralleles entr'elles.

Quant aux autres corps ou poids non sphériques, il est à remarquer que le précédent Cor. 45. ne leur refuse un tel centre de gravité dans la presente hypothese des directions des poids concourantes au centre de la Terre, ou en tel autre point qu'on voudra, qu'en cas que leurs changemens de position par rapport à ce point, n'en apportassent point à la pesanteur ou aux efforts de tendance de leurs parties vers ce point. Mais le contraire paroît dans le Corol. 37. lequel fait voir que dans le mouvement de chacun de ces corps autour du point fixe sur lequel il seroit en équilibre ou en repos, celles de ses parties qu'on approcheroit ainsi du centre de la Terre, où elles sont supposées tendre toutes, en deviendroient d'autant plus legeres (quoiqu'en raison differente) qu'on les en approcheroit davantage, & les autres au contraire d'autant plus pesantes, qu'on les en éloigneroit alors davantage. De sorte que les premieres, qui suivant le Corol. 43. l'emporteroient ici sur les autres, si elles y conservoient toutes leurs premieres pesanteurs, pourroient peut-être par cette diminution de la leur, & par l'augmentation de

celle des autres, ne point l'emporter ici sur elles, & y conserver toujours leur premier équilibre avec elles dans tout ce qu'on pourroit donner de situations nouvelles autour du point d'appui de ce premier équilibre, au corps non sphérique fait (Hyp.) de toutes ces parties: auquel cas ce point seroit ici le centre de gravité de ce corps au sens ordinaire de la Déf. 14. comme lui ou un autre le seroit (Corol. 42.) dans l'hypothese des directions des poids paralleles entr'elles.

Mais il y auroit là une compensation, de la justesse de laquelle il seroit d'autant plus difficile de s'assurer, qu'il faudroit pour cela déterminer tous les angles au centre de la Terre, compris entre les directions de tous les points de chaque corps ou poids qui y tendroient. Cela joint à ce que l'éloignement des corps d'ici au centre de la Terre, est si grand, que sans erreur sensible toutes les directions de leurs parties y peuvent être prises pour paralleles entr'elles; & conséquemment (Corol. 42.) tous ces corps ou poids, de quelques figures qu'ils soient, pour avoir chacun un centre de gravité au sens ordinaire de la Déf. 14. Nous les prendrons donc ainsi dans la suite, en y prenant toujours leurs directions & celles de leurs parties comme paralleles entr'elles, à moins que nous n'aver-tissions du contraire.

COROLLAIRE XLVI.

Suivant le Corol. 42. le centre de gravité d'un corps ou poids quelconque étant (Déf. 14.) un point de ce corps, par lequel ce même corps étant appuyé ou suspendu, il demeureroit en équilibre ou en repos dans toutes les situations possibles autour de ce point fixe; ce point y doit être chargé (Corol. 36. nomb. 2.) de la somme des pesanteurs particulieres de toutes les parties de ce corps, supposées de directions toutes paralleles entre-elles, comme si ces pesanteurs étoient toutes réunies en ce seul point, ou comme si ce centre de gravité avoit seul la pesanteur entiere de tout ce poids. Donc par quelque point que ce soit que ce corps ou poids soit suspendu, par exemple, à un bras de Levier, ou qu'il soit appuyé

En lui, il agira toujours sur ce bras de Levier, comme, s'il n'y étoit suspendu ou appuyé que par son centre de gravité au point où ce bras se trouve rencontré par la direction de ce même centre de gravité, parallele (*Corol. 36. nomb. 2.*) aux directions (*Hyp.*) paralleles des parties de ce même poids.

COROLLAIRE XLVII.

Cela étant, si deux poids E, F, de directions paralleles entr'elles, & fixement appliquées (comme on les voit dans les Fig. 174. 175. 176.) à un Levier quelconque XO, dont l'appui B soit entr'eux dans la droite RS, qui passe par leurs centres de gravité R, S, sont en équilibre entr'eux sur cet appui B par le moyen de la branche BG de Levier XO d'une piece avec elle; le Corol. 40. fait voir qu'ils resteront toujours en équilibre entr'eux dans toutes les situations possibles de ce Levier XO autour de ce même appui B, lequel par conséquent (*Déf. 14.*) en sera ici le centre commun de gravité, chargé (*Corol. 36. nomb. 2.*) de la somme de ces deux poids E, F, suivant une direction parallele aux leurs.

FIG. 174.
175. 176.

Il est visible (*Corol. 46.*) que les poids E, F, fixement attachez au Levier droit XO, qui passe par leurs centres de gravité R, S, dans la Fig. 174. n'y ont que l'effet qu'ils auroient, s'ils y étoient suspendus aux extrêmités R, S, de ce Levier prolongé jusques-là; & qu'ainsi faisant (*Hyp.*) équilibre entr'eux sur l'appui B de ce Levier dans la situation RS, ils le feroient encore alors sur ce même appui B dans toutes les autres situations possibles de ce Levier.

COROLLAIRE XLVIII.

Mais si cet appui B, autour duquel le Levier XO peut tourner par le moyen de la branche BG de ce Levier, accrochée à cet appui, est au-dessus de la droite RS, qui passe par les centres de gravité, R, S, des deux poids E, F, encore de directions paralleles entr'elles, & fixement appliquées au Levier XO dans les

FIG. 177.
178. 179.
180.

Y y

Fig. 177. 179. 180. comme dans celles du précédent Corol. 47. ou qui passe dans la Fig. 178. par les points R, S, de libre suspension de ces deux poids à ce Levier; & si ces deux poids E, F, sont en équilibre entr'eux sur cet appui B dans une situation quelconque XO de ce Levier: quelque autre situation $\alpha\omega$ qu'on lui donne autour de ce point fixe B, le poids F qu'on aura ainsi élevé en f , l'emportera toujours sur l'abaissé E en e , jusqu'à ce qu'il ait ramené le Levier dans la premiere situation XO, excepté lorsqu'on l'aura mis dans celle où rs seroit parallele au-dessus de l'appui B à la premiere situation RS.

Pour le voir soit par cet appui B la droite DP perpendiculaire en D, P, aux directions (*Hyp.*) paralleles entr'elles DR, PS, des poids E, F, & rencontrées en d, p , par les directions rd, sp , de ces deux poids en e, f , paralleles aussi (*Hyp.*) entr'elles & à celles-là, & qui rencontrent RS, en H, K, rencontrée aussi en M par rf . Enfin de l'appui B soit menée sur RS en N la droite BN parallele à ces directions, laquelle se trouve en Bn, lorsque RS est en rs .

Cela fait, les triangles semblables MK f , MH r , donneront MK. MH :: M f . Mr. Or M f . Mr > nf . nr . Et (*constr.*) nf . nr :: NS. NR :: BP. BD. Donc MK. MH > BP. BD. Or (*constr.*) NK. NH > MK. MH. Et Bp. Bd :: NK. NH. Donc à plus forte raison Bp. Bd > BP. BD. Mais l'équilibre supposé dans la situation XO du Levier, donne (*Corol.* 2.) BP. BD :: E. F (*Hyp.*) :: $e. f$. Donc Bp. Bd > $e. f$. Ou $f. e$. > Bd. Bp. Donc aussi (*Corol.* 5.) le poids F en f , l'emportera ici sur le poids E en e dans la situation $\alpha\omega$ du Levier auquel ils sont appliquez; & toujours de même jusqu'à ce que ce Levier soit revenu dans la premiere situation XO de leur équilibre supposé, excepté lorsqu'on l'aura mis dans celle où RS seroit au dessus de l'appui B parallele à la situation d'équilibre qu'on lui suppose ici au-dessous de ce même point B. La raison de cette exception est visible en imaginant les figures de ce Corollaire-ci dans cette autre situation; puisque BD, BP, y restant les mêmes qu'ici, l'on y auroit encore E. F :: BP. BD. ainsi que le don-

ne (*Cor. 2.*) l'équilibre supposé entre ces deux poids E, F, dans la première situation XO du Levier au-dessous de l'appui B. Par conséquent (*Corol. 3.*) ces deux poids feroient encore alors en équilibre entr'eux au-dessus de cet appui B.

C O R O L L A I R E X L I X.

Si l'on renverse directement de bas en haut autour du point fixe B les Fig. 177. 178. 179. 180. du précédent Corol. 48. en sorte que cet appui B se trouve ici au-dessous de la droite RS, comme il étoit au-dessus dans le Corol. 48. on verra ici par le raisonnement qu'on a fait là, que les poids E, F, ne pourront faire équilibre entr'eux que dans une seule situation du Levier XO ainsi placé au-dessus de cet appui B; & qu'en toute autre situation qu'on lui donne autour de cet appui, le poids abaissé l'emportera toujours sur l'autre, jusqu'à ce que RS soit arrivée au-dessous de ce même appui B dans une situation parallèle à la première supposée d'équilibre autour de ce point. On laisse au Lecteur le soin de renverser ainsi ces figures pour ne les pas multiplier inutilement. Mais s'il veut s'en épargner la peine, il n'a qu'à imaginer les poids E, F, avec des tendances suivant RD, SP, directement contraires à celles qu'ils avoient suivant DR, PS, dans le précédent Corol. 48. & ainsi de ces mêmes poids en *r, f*, le raisonnement de ce Corol. 48. leur fera, dis-je, voir ici comme là, que si ces deux poids E, F, sont en équilibre dans la position XO du Levier auquel on les suppose appliquées, en quelque autre situation *xo* qu'on mette ce Levier, l'on aura ici comme là *f.e > Bd. Bp.* & conséquemment (*Corol. 5.*) que le poids F alors en *f*, l'emportera ici sur le poids E alors en *e*; & toujours de même jusqu'à ce que le Levier soit tombé au-dessous de B dans une situation qui y rende *rf* parallèle à la première position RS d'équilibre d'abord supposé, dans laquelle conséquemment il restera au-dessous de B comme dans le Corol. 48.

FIG. 177.
178. 179.
180.

Les deux derniers Corol. 48. 49. se peuvent encore conclure autrement de ce qui les précède. Pour cela soit N le point de la ligne RS, sur lequel appuyé ou soutenu les poids E, F, demeureroient en équilibre entr'eux dans une situation telle qu'on voudra de cette ligne droite regardée comme un Levier auquel ces deux poids feroient appliquez en R, S, par leurs centres de gravité R, S, dans les Figures 177. 179. 180. ou par leurs points R, S, de libre suspension dans la Figure 178. les directions de ces deux poids étant supposées parallèles entr'elles, ce point N en fera aussi un (Corol. 48.) sur lequel appuyé ou soutenu ces mêmes poids feroient encore équilibre entr'eux dans toute autre situation de cette ligne RS, & conséquemment aussi du Levier XO auquel ces deux poids sont supposez attachez ou suspendus, c'est-à-dire, dans toutes les situations possibles de l'une & de l'autre. Donc dans toutes ces différentes situations la direction résultante du concours de ces deux poids E, F, passera toujours (*part. 2.*) par ce point N, & toujours (Corol. 36. nomb. 2.) parallèlement à leurs directions, c'est-à-dire, verticalement. Donc n'y ayant ici (*Hyp.*) d'appui qu'en B, ces deux poids ne peuvent (*princ. gener. Corol. 2.*) demeurer en équilibre entr'eux sur ce point B, que lorsqu'il se trouvera dans la verticale qui passera par N, ou (ce qui revient au même) seulement lorsque ce point N se trouvera dans la verticale qui passera par B, telle qu'est (*constr.*) BN dans ces figures-ci. Or il est visible que de toutes les situations possibles de la droite RS, ou du Levier XO autour de l'appui B, il n'y en a que deux où le point N de la droite RS puisse se rencontrer dans la verticale menée par ce point fixe B, sçavoir, une au-dessous de lui, & l'autre directement au-dessus parallèle à celle-là. Donc soit que cet appui B se trouve au-dessus de RS comme dans le Corol. 48. ou qu'il se trouve au-dessous, comme dans le Corol. 49. il n'y a que ces deux situations où le Levier XO puisse demeurer en repos, &

les poids E, F, en équilibre entr'eux sur cet appui B, ſçavoir, lorsque le point N de la ligne RS ſe trouvera dans la verticale qui paſſera par cet appui B, ſoit au-deſſous ou au-deſſus de cet appui; & que dans quelqu'autre ſituation qu'on mette ce Levier, il retombera toujours au-deſſous de l'appui B juſqu'à ce que le point N de la droite RS ſoit dans la verticale qui paſſera par ce point B, telle qu'on ſuppoſe ici BN. Ce qui comprend à la fois les Corol. 48. 49.

COROLLAIRE LI.

Suivant cela, le point N étant ici (Corol. 47.) le centre commun de gravité des poids E, F, de directions (Hyp.) paralleles entr'elles; le Levier XO, ni ces deux poids ne s'arrêteront en équilibre ſur l'appui B, que lorsque leur centre commun de gravité ſera le plus bas ou le plus haut qu'il puiſſe être au-deſſous ou au-deſſus de B dans la verticale qui paſſera par ce point: ainſi lorsque ce centre commun N de gravité ne ſera point au plus haut qu'il puiſſe être, il retombera toujours au plus bas dans cette verticale, où il demeurera, & y retiendra le Levier avec les poids E, F, en équilibre entr'eux.

COROLLAIRE LII.

Puiſque (Corol. 47. 48. 49. 50.) deux poids appliquez fixement à un Levier, ne peuvent reſter en équilibre dans toutes les ſituations poſſibles de ce Levier, que ſur un point qui ſoit entr'eux dans la droite qui paſſe par leurs centres particuliers de gravité, & qu'il y a toujours (Cor. 2. 47.) un tel point dans cette ligne; leur centre commun de gravité (Déf. 14.) doit toujours être dans cette même ligne, & jamais ailleurs, c'eſt-à-dire, toujours entr'eux en ligne droite avec leurs centres particuliers de gravité, & diviſer toujours (Corol. 2. 3.) la diſtance d'un de ces centres particuliers à l'autre, ou cette ligne en raïſon reciproque de ces poids: de forte qu'un tel point de diviſion de la diſtance de leurs centres par-

ticuliers de gravité, fera toujours (*Corol. 47. & Déf. 14.*)
le centre commun de gravité de ces deux poids.

S C H O L I E.

FIG. 135.
& suivantes
jusqu'à 146.

Les proprietéz du Tour, du Treuil, du Vindas & des autres Machines qui y ont rapport, déjà démontrées dans la Section 4. sans le secours d'aucune autre Machine, se démontrent aussi d'ordinaire par le moyen des Leviers auxquels on les réduit : par exemple, dans les Figures comprises depuis la 135^e. jusqu'à la 146^e. inclusivement de part & d'autre, on considere MAN comme un Levier dont l'appui est en A, & aux bras AM, AN, duquel le poids P & la puissance R sont perpendiculairement appliquez, c'est-à-dire, suivant des directions perpendiculaires à ces bras; & l'on trouve par ce moyen (*Th. 21. Corol. 2.*) $P. R :: AN. AM.$ lorsque ce poids P & cette puissance R sont en équilibre sur l'appui A de cette espece de Machine, ainsi que nous l'avons déjà trouvé sans le secours d'aucune autre dans la Section 4. *Th. 19. Corol. 1. & nomb. 2. du Corol. 3.* En réduisant ainsi en Leviers le Tour, le Treuil, & les autres Machines qui y ont rapport, le present *Th. 21.* avec ses Corollaires pourroit servir de même à démontrer tout le contenu de cette Sect. 4. Mais aussi reciproquement cette Section pourroit elle servir à démontrer ce Théoreme avec ses Corollaires, en regardant au contraire les Leviers comme faits de bras de Tour, de Vindas, &c. l'indépendance de toutes ces Machines entr'elles, est ce qui m'a porté à les démontrer indépendamment les unes des autres, le précédent principe general convenant également & immédiatement à toutes sortes de Machines, sans être obligé de se forcer l'imagination à les transformer ainsi d'une espece en une autre.

THEOREME XXII.

FIG. 153.
& suivantes
jusqu'à 167.

En cas d'équilibre dans les Figures précédentes *Th. 21.*
entre les puissances E, F, sur l'appui B du Levier quelconque

AN, auquel elles sont appliquées suivant des directions aussi quelconques; si d'un des angles R ou S du parallelogramme ARGS, par exemple, de l'angle R on mene RK perpendiculaire en K sur la diagonale AG prolongée.

I. Les efforts de ces deux puissances E, F, sur l'appui B suivant sa direction AB ou BA, seront toujours entr'eux en raison de AK à KG.

II. Chacun de ces efforts sera aussi toujours à la charge de cet appui résultante de leur somme ou de leur difference, comme chacune de leurs expressions AK, KG, sera à la diagonale AG du parallelogramme ARGS.

DEMONSTRATION.

PART. I. Après avoir aussi mené SL perpendiculaire en L sur la diagonale AG prolongée, soient appelez K, L, les efforts que les puissances E, F, font (selon Lem. 3. part. 2.) sur l'appui B suivant cette diagonale AG, laquelle en ce cas d'équilibre passe (Th. 21. part. 4.) par ce point d'appui B. Ce même Lem. 3. part. 2. fait voir que $K.E::AK.AR$. Et $F.L::AS.AL$. De plus la part. 3. & le Corol. 1. du Th. 21. fait voir aussi que $E.F::AR.AS$. De sorte qu'en ce présent cas d'équilibre,

L'on aura toujours

$$\left\{ \begin{array}{l} K.E::AK.AR. \\ E.F::AR.AS. \\ F.L::AS.AL. \end{array} \right.$$

Donc (en multipliant par ordre) $K.L::AK.AL$. Mais les triangles (constr.) semblables GRK, ALS, ayant $GR=AS$ à cause du parallelogramme ARGS, ont pareillement $AL=KG$. Donc aussi $K.L::AK.KG$. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

PART. II. Puisque (part. 1.) $K.L::AK.KG$ ou $L.K::KG.AK$. l'on aura pareillement ici $L+K.K::KG+AK.AK$. sçavoir, $L+K.K::KG+AK.AK::AG.AK$. dans les Fig. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 167. Et $L-K.K::KG-AK.AK::AG.AK$. dans

les Fig. 162. 163. 164. 165. 166. Donc la charge de l'appui B résultante de la somme ou de la différence des efforts K, L, que les puissances E, F, font sur lui en même sens dans les premières de ces Figures, étant $=L+K$; & étant $=L-K$ dans les autres Figures où ces efforts K, L, sont directement contraires: la charge de l'appui B résultante du concours des puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur lui, c'est-à-dire, résultante de la somme ou de la différence des efforts K, L, que ces deux puissances font sur lui suivant une même ligne droite AB, sera toujours ici à un tel effort K de la puissance E: : AG. AK. Or (*part. 1.*) K. L: : AK. AL. Donc (en raison ordonnée) cette charge de l'appui B sera aussi toujours à l'effort L de la puissance F: : AG. AL. Par conséquent en appelant B cette charge de l'appui B, l'on aura par tout ici B. K: : AG. AK. & B. L: : AG. AL. ou K. B: : AK. AG. & L. B: : AL. AG. c'est-à-dire, que chacun des efforts K, L, des puissances E, F, sur l'appui B de leur équilibre entre-elles, sera par tout ici à la charge de cet appui, résultante de la somme ou de la différence de ces efforts, comme chacune des expressions (*part. 1.* AK, AL ou KG, sera à la diagonale AG du parallélogramme ARGS. Ce qu'il falloit 2^o. démontrer.

COROLLAIRE I.

La *part. 1.* donnant K. L: : AK. KG. & les triangles (*constr.*) rectangles semblables AKR, GLS; & ALS, GKR, ayant (de même que le parallélogramme ARGS) AR=GS, AS=GK, auront aussi KR=LS, AL=GK; & conséquemment, si l'on prolonge KR jusqu'à la rencontre de AF en V, l'on aura ici KV. KR: : KV. LS: : AK. AL: : AK. KG: : K. L. Mais en prenant AK pour le rayon, la Déf. 10. fait voir que KV, KR, sont les tangentes des angles VAK, RAK, ou de leurs égaux ou complémens FAB, EAB. Donc les efforts K, L, des puissances E, F, sur l'appui B suivant la direction AB ou BA, en cas d'équilibre entr'elles sur cet appui, seront aussi toujours

jours entr'eux comme ces tangentes KV, KR des angles FAB, EAB, compris entre chacune des directions AE, AF, de ces puissances, & la direction AB de la charge (*Th. 21. Corol. 35.*) de l'appui B de leur équilibre entr'elles.

COROLLAIRE II.

La part. 2. fait aussi voir que chacune de ces puissances E, F, en équilibre (*Hyp.*) sur l'appui B, contribue à la charge de cet appui, lorsqu'elles conspirent ensemble à le charger, comme dans les Fig. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 167. ou de combien l'une lui aide à soutenir l'effort de l'autre sur lui, lorsqu'elles le pressent à contre-sens, comme dans les autres Fig. 162. 163. 164. 165. 166. cette partie 2. fait, dis-je, voir que la perpendiculaire RK sur la diagonale AG prolongée, donne toujours AK à KG, comme ce que la puissance E a de part à la charge de cet appui B, est à ce que la puissance F y en a dans le premier cas; ou comme ce que la puissance E soutient de l'effort de la puissance F sur cet appui, est à ce même effort de la puissance F.

Cette part. 2. fait voir de plus que la perpendiculaire SL sur la même diagonale AG prolongée, donne aussi GL à AL en cette même raison; puisque les triangles (*constr.*) semblables AKR; GLS; & ALS, GKR, ayant AR=GS, & AS=GR, à cause du parallélogramme ARGF, ont aussi GL=AK, & AL=KG.

COROLLAIRE III.

Suivant cela, & suivant la part. 3. & les Corol. 1. 35 du Th. 21. deux puissances quelconques, appliquées à un Levier aussi quelconque MN suivant telles directions qu'on voudra, étant supposées en équilibre entr'elles sur l'appui B de ce Levier; si l'on mène de cet appui au concours A de ces directions une droite AB, sur laquelle prolongée (s'il est nécessaire) soit la diagonale AG d'un parallélogramme ARGS fait de côtes AR, AS, pris sur ces mêmes directions des puissances E, F; & qu'ensuite

de son angle R on mene RK perpendiculaire en K sur cette diagonale AG prolongée: l'on aura tout à la fois,

1°. Par la part. 3. & le Corol. 1. du Th. 21. les puissances E, F, entr'elles comme les côtez AR, AS, correspondans du parallelogramme ARGS; & chacune à la charge de l'appui B, résultante de leur concours, comme chacun de ses côtez AR, AS, est à la diagonale AG de ce parallelogramme.

2°. Par le Corol. 35. du Th. 21. l'on aura AB ou BA, en un mot AG pour la direction de cette charge de l'appui B.

3°. Par le précédent Corol. 2. les parties AK, KG ou GL, LA, de la diagonale AG prolongée entr'elles comme ce que les puissances E, F, contribuent à cette charge de l'appui B, lorsqu'elles conspirent ensemble à le charger; ou comme ce que la puissance E soutient de l'effort de la puissance F, est à ce même effort de cette puissance F.

C O R O L L A I R E I V.

Ayant ici (part. 2.) $K.B::AK.AG$. Et $L.B::AL.AG$. Outre (Lem. 3. Corol. 1. nomb. 3.) $E.K::AR.AK$. Et $F.L::AS.AL$. la première & la troisième de ces quatre analogies donneront (en raison ordonnée) $E.B::AR.AG$. la seconde & la quatrième donneront de même $F.B::AS.AG$. Donc en cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B, chacune d'elles fera toujours à la charge de cet appui, résultante de leur concours d'action sur lui, comme chacun des côtez AR, AS, sont à la diagonale AG du parallelogramme ARGS qui a ses côtez sur les directions de ces puissances, & sa diagonale sur une ligne droite menée du concours A de ces directions sur l'appui B, conformément à la part. 3. du Th. 21.

Tous les Corollaires tirez de cette partie 3. du Th. 21. pourroient être pareillement déduits de ce Corol. 4. les Corollaires du Th. 2. sont aussi voir qu'on en pourroit encore tirer de pareils de celui-ci. Tout cela est presentement trop aisé pour s'y arrêter davantage.

Fig. 153.

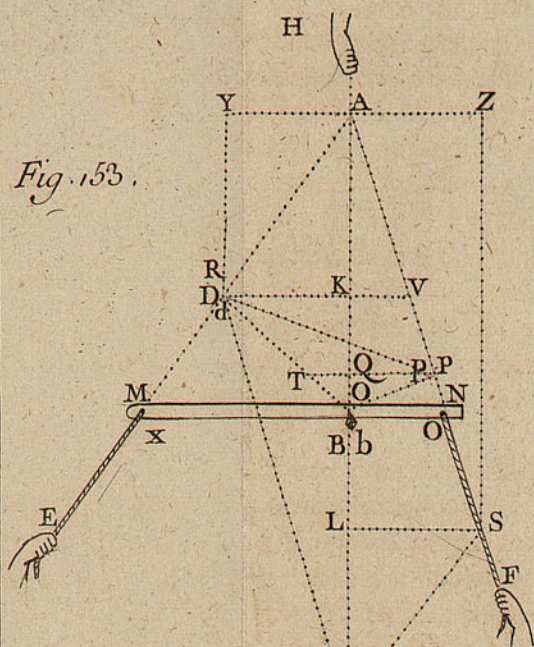


Fig. 154.

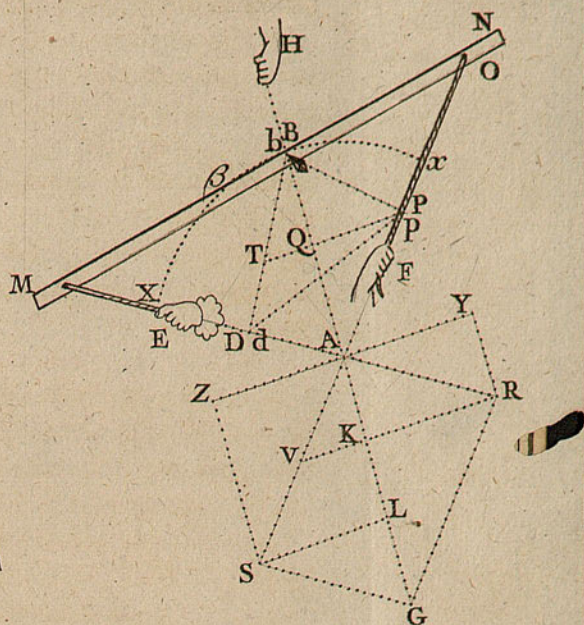


Fig. 155.

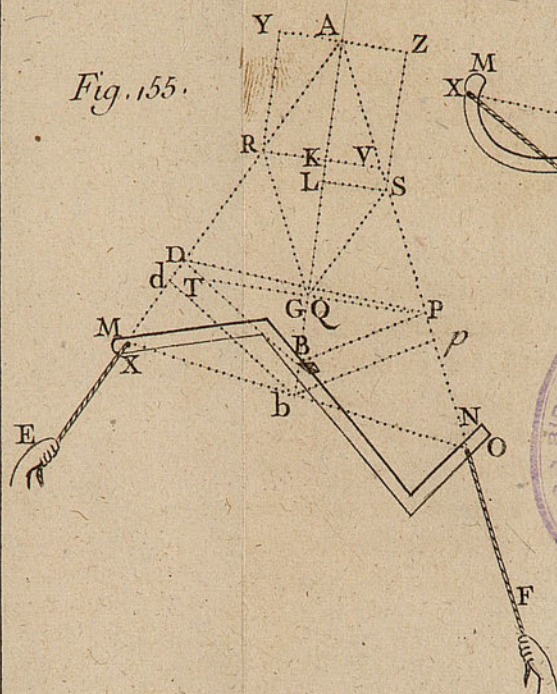


Fig. 156.

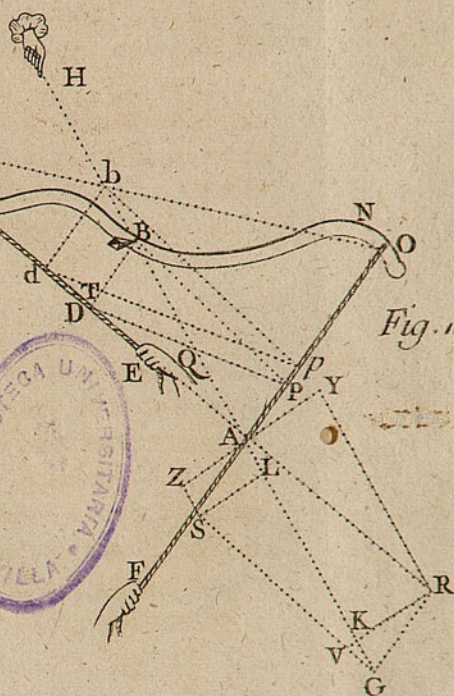


Fig. 157.

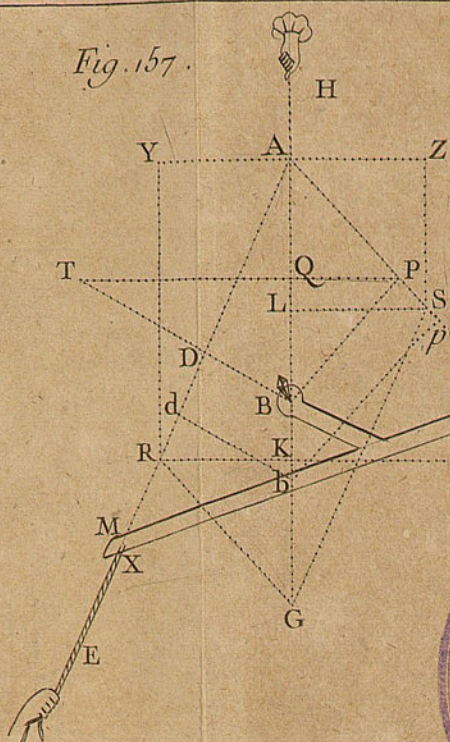


Fig. 158.

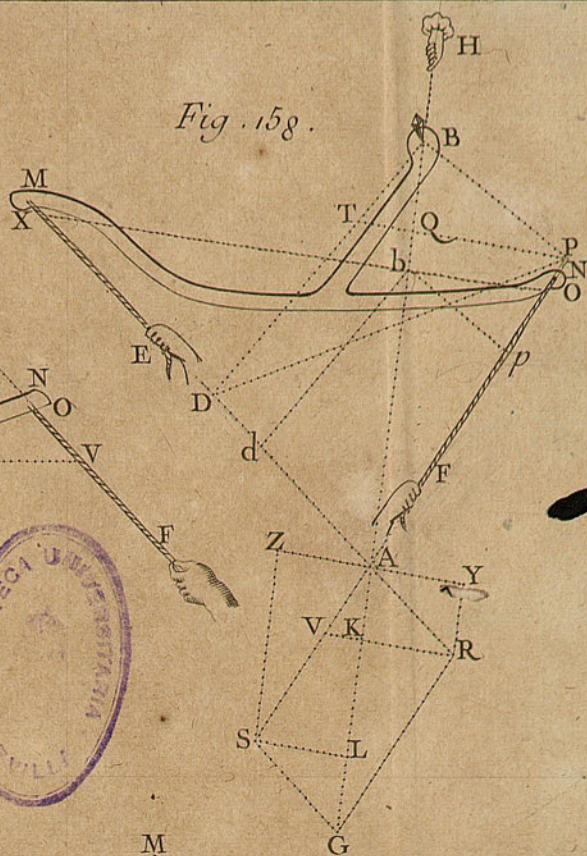


Fig. 159.

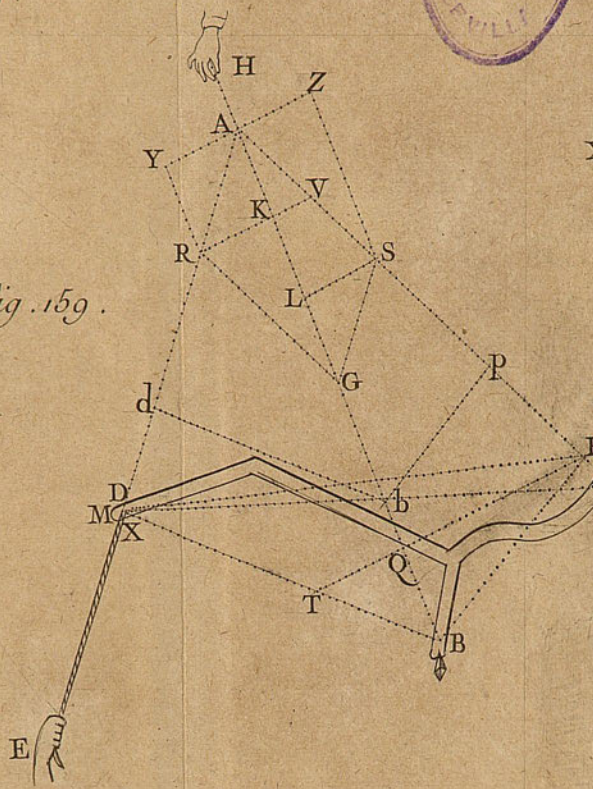
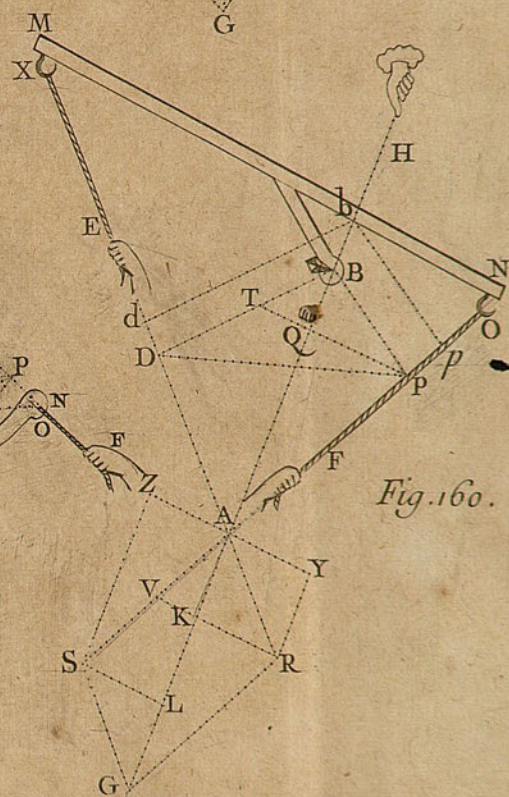
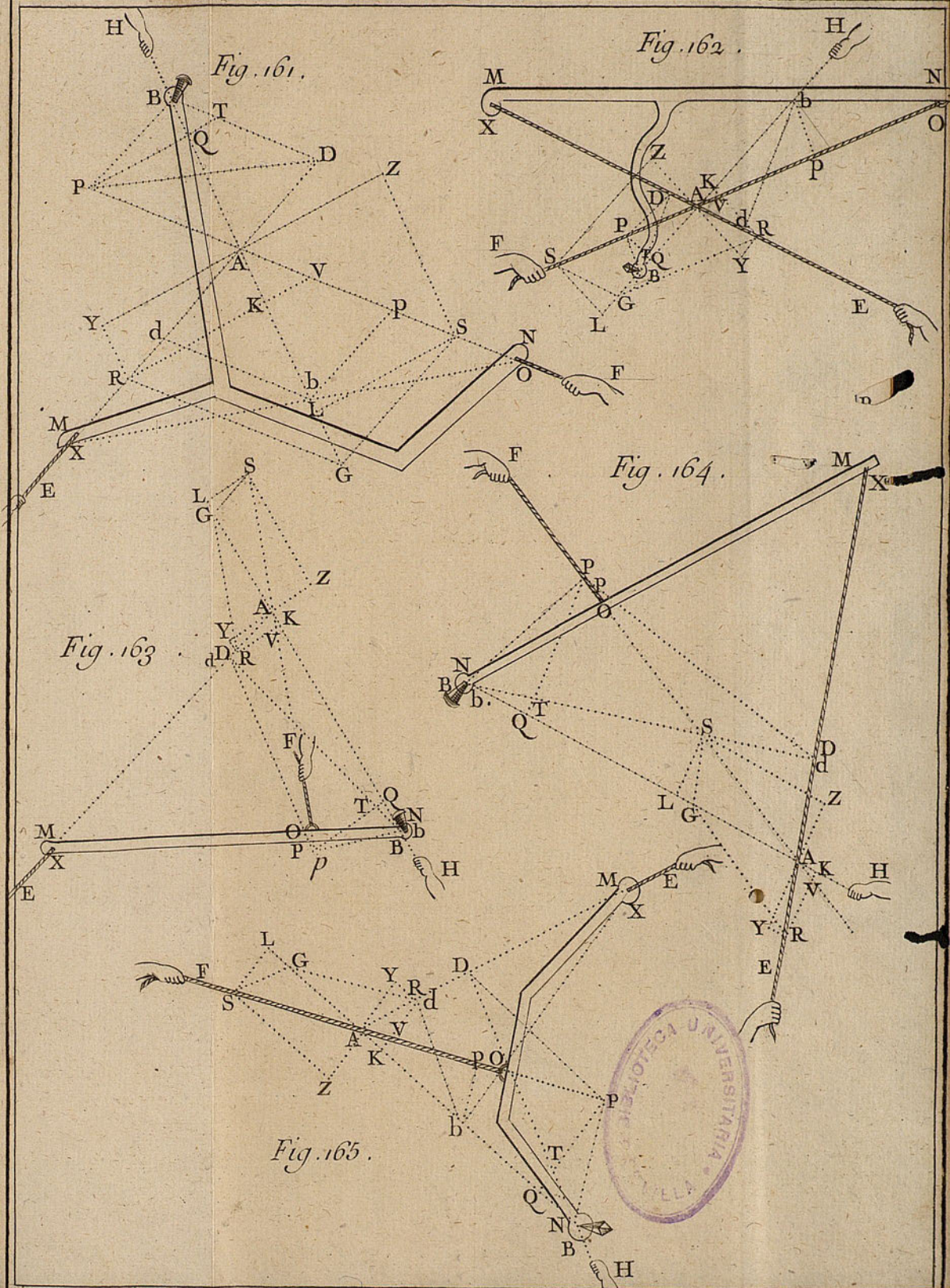


Fig. 160.





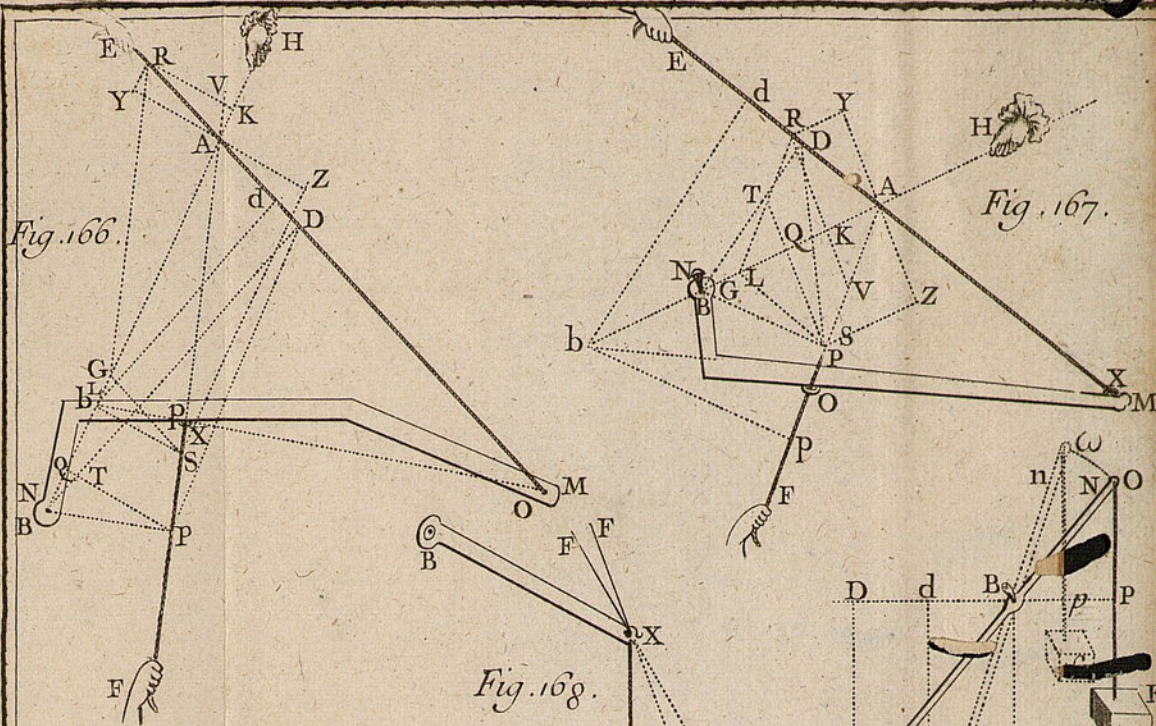


Fig. 168.

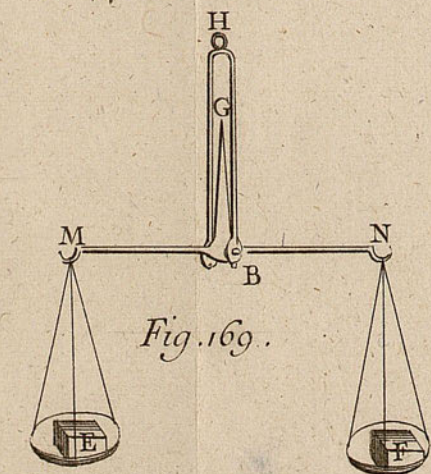


Fig. 169.



Fig. 170.

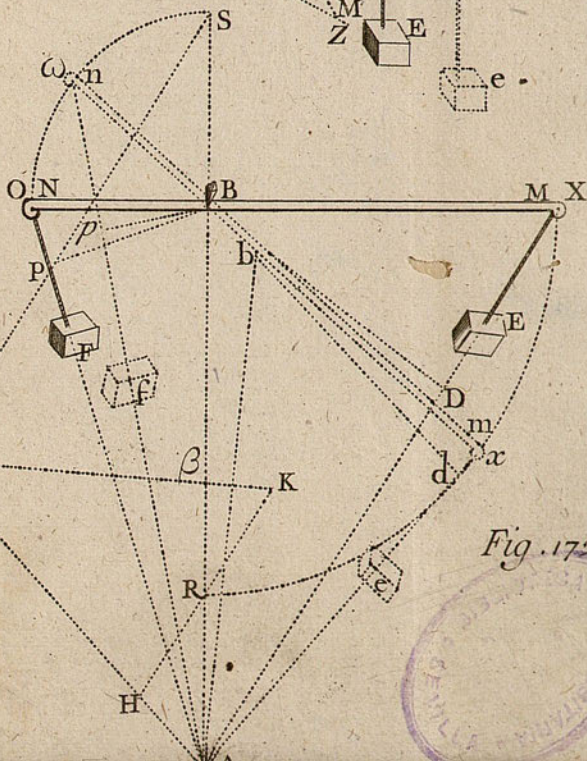


Fig. 172.

SCHOLIE.

Si l'on imagine les parallelogrammes rectangles AKR \bar{Y} , ALSZ, dont les diagonales AR, AS, soient sur les directions AE, AF, des puissances E, F, depuis leur concours A : les forces absolues de ces puissances suivant ces directions, étant composées (Lem. 3. Corol. 6.) chacune de deux autres suivant AK, AY, pour la premiere E, & suivant AL, AZ, pour la seconde F ; on verra comme dans la part. 3. du Lem. 3. que de ces quatre forces composantes, les deux suivant AY, AZ, toujours égales & directement opposées entr'elles, se détruisent ou se soutiennent toujours mutuellement, & que les deux autres composantes suivant AK, AL, se trouvent aussi détruites ou soutenues par la résistance invincible de l'appui B placé dans leur direction commune AG, lorsqu'elles agissent en même sens suivant cette direction ; ou par la résistance de cet appui aidé de la plus foible, lorsqu'elles agissent en sens contraires suivant cette même direction AG : de sorte que pour lors les composées E, F, le font aussi toujours, & conséquemment hors d'état de faire pencher le Levier MN d'aucun côté, ainsi qu'on l'a déjà vu dans la part. 5. du Th. 21.

THEOREME XXIII.

Soient deux puissances quelconques E, F, appliquées en X, O, au Levier droit MN de situation quelconque, suivant des directions XE, OF, qui prolongées concourent en tel point A, qu'on voudra. FIG. 181.
& suivantes
jusqu'à
186.

I. Si ces deux puissances E, F, ainsi appliquées au Levier MN, sont en équilibre entr'elles sur quelque point B de ce Levier, l'on aura toujours alors $E.F :: AX \times BO. AO \times BX.$

II. Reciproquement si ces deux puissances E, F, appliquées (comme ci-dessus) au Levier MN, sont entr'elles en cette raison : elles feront équilibre entr'elles sur le point B de ce Levier.

DEMONSTRATION.

PART. I. Soit menée BA prolongée vers G ; & autour de sa partie quelconque AG, comme diagonale, soit le parallélogramme ARGS fait de côtez AR, AS, pris sur les directions prolongées AX, AO, des puissances E, F. Cela fait, si l'on y ajoute par R la droite RV parallèle à ce Levier MN, & qui prolongée rencontre BG, OS, en K, V ; les triangles XAO, RAV ; BAO, KAV ; BAX, KAR, AKV, GKR, qu'on voit ici (*constr.*) semblables entre-eux deux à deux, donneront $AX, AO :: AR, AV$. Et $BO, BX :: KV, KR :: AV, GR :: AV, AS$. c'est-à-dire,

$$\{ AX, AO :: AR, AV.$$

$$\{ BO, BX :: AV, AS.$$

Donc (en multipliant par ordre) $AX \times BO, AO \times BX :: AR \times AV, AS \times AV :: AR, AS$. Or en cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B du Levier MN, l'on aura (*Th. 21. Corol. 1.*) toujours $E, F :: AR, AS$. Donc en ce cas d'équilibre l'on aura aussi toujours ici $E, F :: AX \times BO, AO \times BX$. *Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.*

Autrement. En prenant \int pour la marque ou la caractéristique des sinus, la Trigonométrie donnera $\int BAO, \int ABO :: BO, AO$. Et $\int ABX, \int BAX :: AX, BX$. Donc les angles ABX, ABO, égaux entreux, ou complemens l'un de l'autre à deux droits, rendant (*Déf. 9. Corol. 2.*) leurs sinus $\int ABX, \int ABO$, égaux entr'eux ; l'on aura ici (en multipliant par ordre les deux analogies précédentes) $\int BAO, \int BAX :: AX \times BO, AO \times BX$. Or l'équilibre ici supposé entre les puissances E, F, y donne (*Th. 21. Cor. 11. nomb. 1.*) $E, F :: \int BAO, \int BAX$. Donc en ce cas d'équilibre, l'on aura toujours ici $E, F :: AX \times BO, AO \times BX$. *Ce qu'il falloit encore 1^o. démontrer.*

PART. II. Reciproquement si l'on suppose ici $E, F :: AX \times BO, AO \times BX$, il y aura ici équilibre entre ces deux puissances E, F, sur l'appui B du Levier MN, auquel elles soient appliquées comme ci-dessus. Car la constru-

tion demettant la même ici que là, l'on aura encore ici comme là (*démonstrat. 1. de la part. 1.*) $AX \times BO. AO \times BX :: AR. AS.$ Donc on aura ici $E. F :: AR. AS.$ Par conséquent (*Th. 21. part. 6.*) ces deux puissances E, F , demeureront ici en équilibre entr'elles sur le point B du Levier MN , par lequel passe la diagonale AG prolongée du parallélogramme $ARGS$, fait de côtez AR, AS , pris sur les directions AX, AO prolongées de ces deux puissances E, F . *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

Autrement. La construction donnera ici (comme dans la démonstration 2. de la part. 1.) $\int BAO. \int BAX :: AX \times BO. AO \times BX.$ Donc suivant l'hypothèse qu'on fait ici de $E. F :: AX \times BO. AO \times BX.$ l'on y aura $E. F :: \int BAO. \int BAX.$ Par conséquent (*Th. 21. Corol. 11. nomb. 2.*) ces deux puissances E, F , seront ici en équilibre entr'elles sur l'appui B du Levier MN auquel on les suppose appliquées. *Ce qu'il falloit encore 2°. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Le cas d'équilibre entre les poids E, F , sur le point B de leur Levier XO , donnant toujours ici (*part. 1.*) $E. F :: AX \times BO. AO \times BX.$ Et conséquemment $E \times AO \times BX = F \times AX \times BO.$ l'on y aura aussi toujours alors $BX. BO :: F \times AX. E \times AO.$ c'est-à-dire, que l'appui de cet équilibre divisera toujours le Levier droit XO en deux bras BX, BO , qui seront entr'eux en raison composée de la reciproque des poids E, F , & de la directe de leurs distances AX, AO , au centre A de la Terre.

COROLLAIRE II.

Reciproquement dans la même hypothèse de la pesanteur de chaque poids en raison de sa distance au centre de la Terre, auquel il tende toujours, deux tels poids E, F , seront toujours en équilibre sur le point B qui divisera leur Levier XO en cette raison de $BX. BO :: F \times AX. E \times AO.$ Puisque cette raison ou proportion donnant $E \times AO \times BX = F \times AX \times BO$, l'on aura pour lors $E. F :: AX \times BO.$

$AO \times BX$. Ce qui (*part. 2.*) rend toujours ici ces deux poids E, F, en équilibre entr'eux sur ce point B.

COROLLAIRE III.

Fig. 187.
& suivantes
jusqu'à 192.

Tout ce qu'on voit des précédentes Fig. 181. 182. 183. 184. 185. 186. dans les présentes Fig. 187. 188. 189. 190. 191. 192. demeurant les mêmes ici que là, si l'on y ajoute BH, BL qui fassent en B avec XO les angles $XBH = XAB$, $OBL = OAB$;

1°. La part. 1. fait voir qu'en cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B, on aura toujours $E. F :: BL. BH$. Car les triangles semblables AXB , BXH ; AOB , BOL , résultans de la présente supposition des angles $XBH = XAB$, $OBL = OAB$, donneront $AX. AB :: BX. BH$. Et $AB. AO :: BL. BO$. D'où résulte (en multipliant par ordre) $AX. AO :: BX \times BL. BO \times BH$. Ce qui donne $AX \times BO \times BH = AO \times BX \times BL$; & conséquemment $BL. BH :: AX \times BO. AO \times BX$. Or en ce cas d'équilibre des puissances E, F, sur l'appui B du Levier MN, auquel elles sont (*Hyp.*) appliquées en X, O, suivant des directions concourantes en A; la part. 1. donne $E. F :: AX \times BO. AO \times BX$. Donc en ce même cas l'on aura aussi $E. F :: BL. BH$. ainsi qu'on le vient d'avancer.

2°. La part. 2. fait reciproquement voir que si $E. F :: BL. BH$. Ces deux puissances E, F, appliquées comme ci-dessus aux points X, O, du Levier MN, seront en équilibre entr'elles sur l'appui B de ce Levier: car la construction demeurant ici la même que dans le précédent nomb. 1. l'on aura encore ici comme là, $BL. BH :: AX \times BO. AO \times BX$. Donc la présente hypothese donnant ici $E. F :: BL. BH$. l'on y aura pareillement $E. F :: AX \times BO. AO \times BX$. Par conséquent (*part. 2.*) ces deux puissances E, F, seront ici en équilibre entr'elles sur le point B du Levier MN, auquel on les suppose appliquées comme ci-dessus.

Fig. 173.

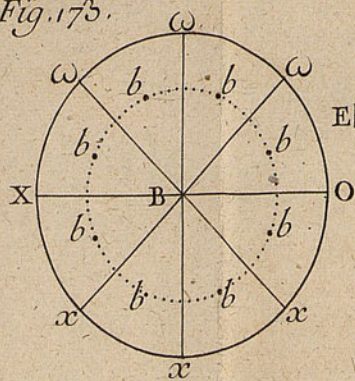


Fig. 174.

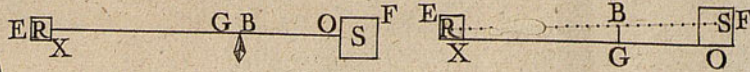


Fig. 175.

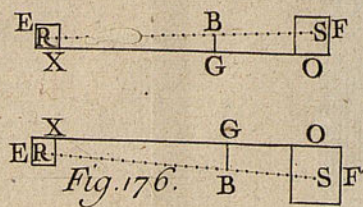


Fig. 176.

Fig. 178.

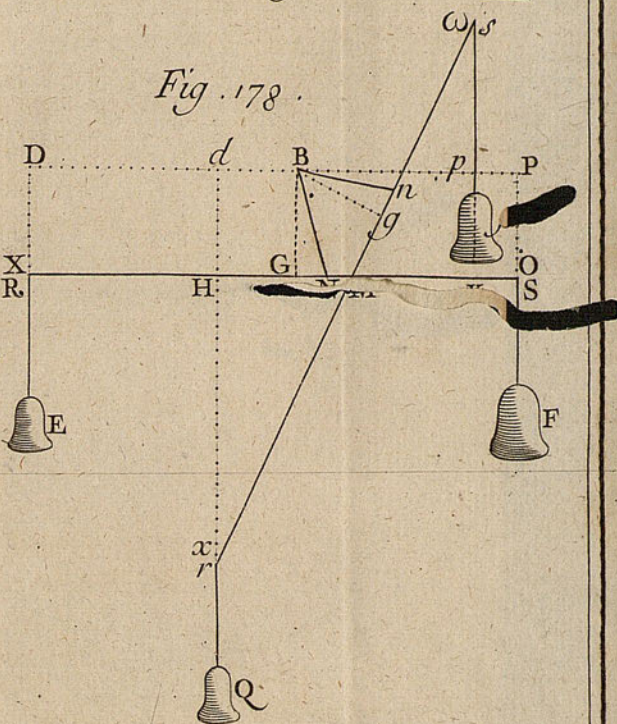


Fig. 177.

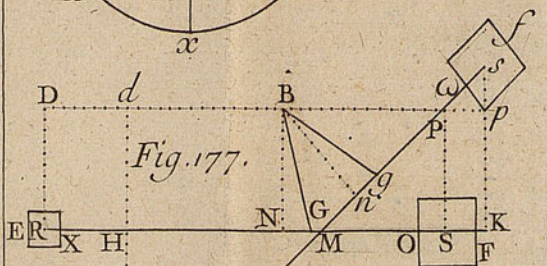


Fig. 179.

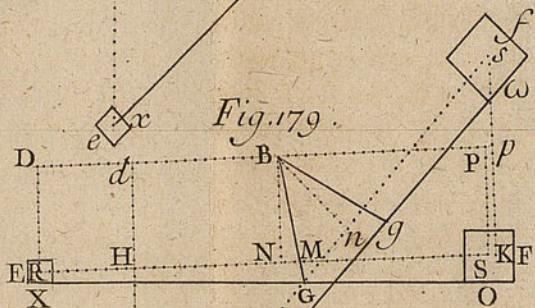


Fig. 180.

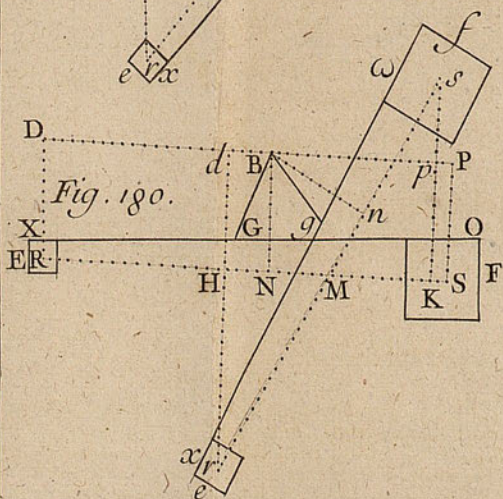
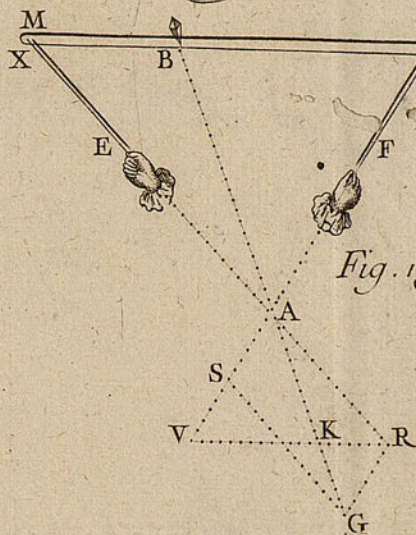


Fig. 181.





C O R O L L A I R E I V.

Pour voir presentement l'accord du précédent Corol. avec les Corol. 2. 3. du Th. 21. dans lesquels ayant mené BD, BP, perpendiculaires aux directions XE, OF, des puissances E, F, l'on a vû que le cas d'équilibre entre ces deux puissances sur un point quelconque B de leur Levier MN, donne toujours $E. F. :: BP. BD.$ Et reciproquement que ce rapport rend toujours ces deux puissances E, F, en équilibre entr'elles sur cet appui B. Cela joint au précédent Corol. 3. fait voir que l'on doit toujours avoir ici $BP. BD. :: BL. BH.$ quoique les deux triangles PBL, DBH, ne soient point semblables entr'eux. Pour voir (dis-je) cet accord, voici comment il résulte du présent Th. 23.

1°. Que $E. F. :: BP. BD.$ en cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur le point B de leur Levier MN; car la Trigonométrie fait voir (en prenant encore ici pour la marque des sinus) que $AX. BX. :: \sin ABX. \sin BAX.$ Et $BO. AO. :: \sin BAO. \sin ABO.$ Ce qui (en multipliant par ordre) donne $AX \times BO. AO \times BX. :: \sin ABX \times \sin BAO. \sin ABO \times \sin BAX$ (à cause de $\sin ABX = \sin ABO$) $:: \sin BAO. \sin BAX$ (en prenant AB pour sinus total) $:: BP. BD.$ Or la part. 1. fait voir qu'en cas d'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B du Levier MN, auquel on les suppose appliquées, l'on aura toujours $E. F. :: AX \times BO. AO \times BX.$ Donc en ce cas d'équilibre cette part. 1. donne aussi toujours $E. F. :: BP. BD.$ de même que le Corol. 2. du Th. 21. ainsiqu'il le falloit 1°. faire voir.

2°. La part. 2. fait reciproquement voir que ce rapport rend toujours ces deux puissances E, F, en équilibre entr'elles sur le point B de leur Levier MN. Car si $E. F. :: BP. BD. :: \sin BAO. \sin BAX.$ l'égalité $\sin ABX = \sin ABO$ rendra pour lors $E. F. :: \sin ABX \times \sin BAO. \sin ABO \times \sin BAX$ (en raisonnant comme dans le précédent nomb. 1.) $:: AX \times BO. AO \times BX.$ Donc (part. 2.) les puissances E, F, supposées en raison de BP à BD, seront ici en équilibre.

bre entr'elles (comme dans le Corol. 3. du Th. 21.) sur l'appui B déterminé par ce rapport. Ce qu'il falloit aussi faire voir.

COROLLAIRE V.

Puisque (*part. 1.*) en cas d'équilibre sur l'appui B du Levier MN entre les puissances E, F, qui (*Hyp.*) y sont appliquées en X, O, avec des directions concourantes en A, l'on aura toujours $E. F. :: AX \times BO. AO \times BX.$ & que reciproquement (*part. 2.*) il y aura toujours équilibre sur le même appui B entre ces deux puissances E, F, tant qu'elles seront entr'elles en ce rapport: il suit,

1°. Que si $BX = BO$, quelques soient AX, AO, l'équilibre entre les puissances E, F, sur l'appui B, donnera toujours (*part. 1.*) $E. F. :: AX. AO.$ Et reciproquement que dans cette hypothese de $BX = BO$, ce rapport entre ces deux puissances E, F, les mettra toujours (*part. 2.*) en équilibre entr'elles sur le même appui B.

2°. Que si $AX = AO$, comme lorsque le point A est infiniment éloigné du Levier MN, & que ces directions AX, AO, sont conséquemment (*Lem. 6. Corol. 1.*) paralleles entr'elles; l'équilibre sur l'appui B entre les puissances E, F, donnera toujours alors (*part. 1.*) $E. F. :: BO, BX.$ Et reciproquement (*part. 2.*) que ce rapport les mettra toujours en équilibre entr'elles sur le même appui B dans ce cas de leurs directions paralleles entr'elles. Tout ceci s'accorde encore pour ce cas avec les Corol. 2. 3. du Th. 21.

COROLLAIRE VI.

Si au lieu des puissances E, F, des Fig. précédentes, on suppose ici deux poids ou deux points pesans E, F, appliquez aux extrémités X, O, du Levier droit XO suivant des directions XA, OA, qui concourent en un point quelconque A, qui soit (si l'on veut) le centre de la Terre, auquel point nous allons presentement supposer que tous les poids tendent.

Fig. 182.

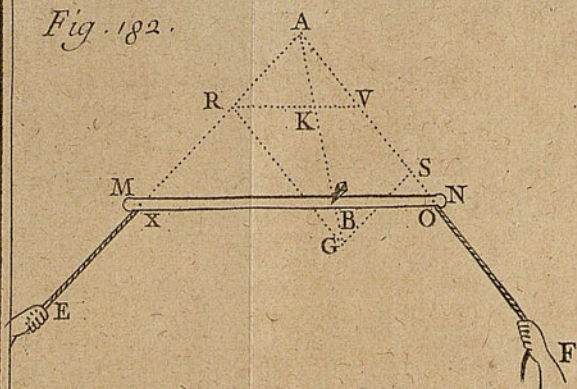


Fig. 183.

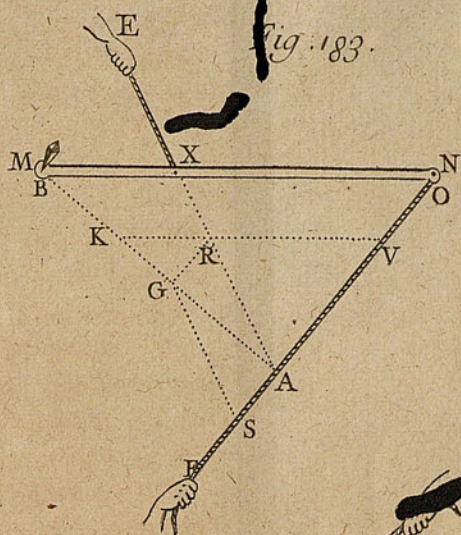


Fig. 184.

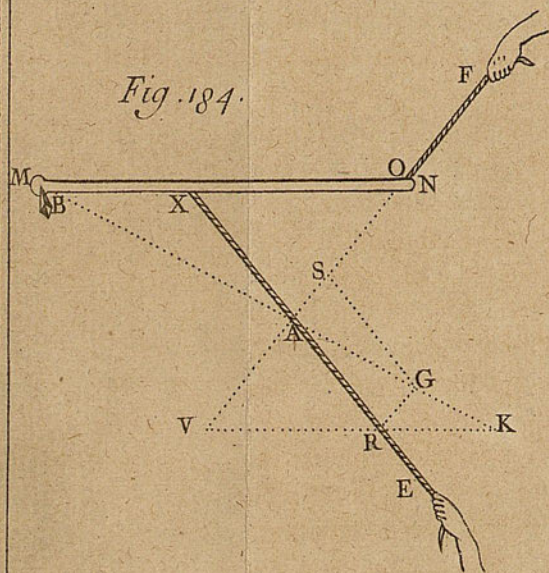


Fig. 185.

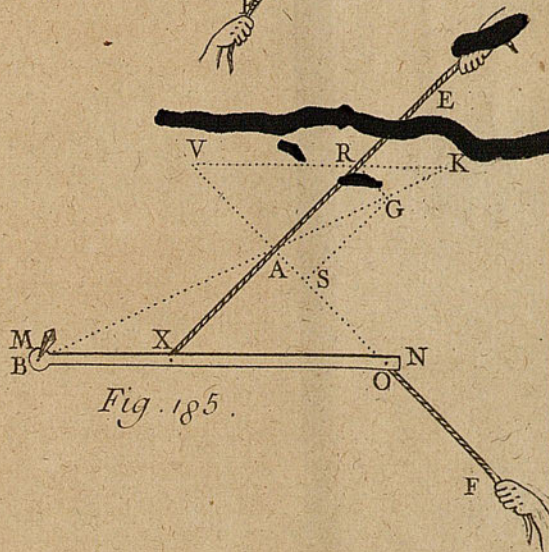


Fig. 186.

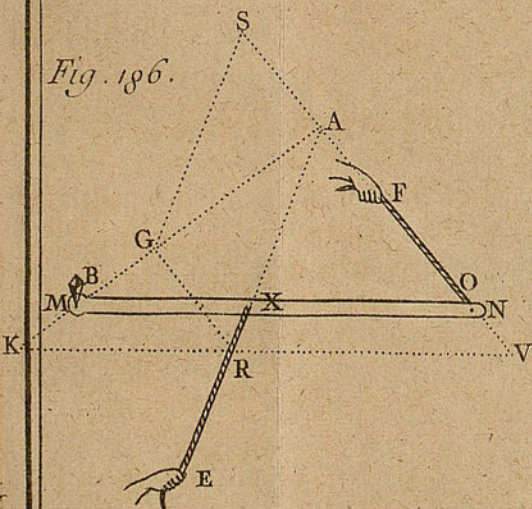
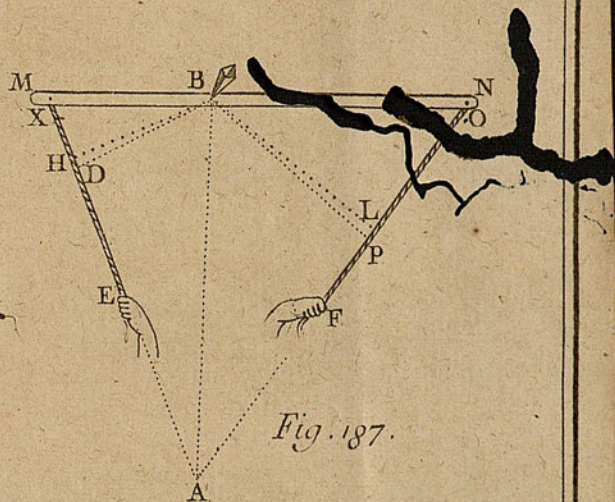


Fig. 187.



que dans



1°. En cas d'équilibre entre ces deux poids quelconques E, F, sur tel point B que l'on voudra de leur Levier XO, la part. 1. fait voir que l'on aura toujours E. F :: AX × BO. AO × BX.

2°. La part. 2. fait reciproquement voir que si ces deux poids E, F, sont entr'eux en ce rapport, ils seront en équilibre entr'eux sur le point B de leur Levier XO.

3°. Si après avoir mené BA, on fait les angles XBH = XAB, OBL = OAB, le nomb. 1. du Corol. 3. fait voir qu'en cas d'équilibre entre les poids F, F, sur le point B de leur Levier XO, l'on aura toujours E. F :: BL. BH.

4°. Le nomb. 2. du même Corol. 3. fait reciproquement voir que si E. F :: BL. BH. ces deux poids E, F, seront en équilibre entr'eux sur le point B de leur Levier XO.

C O R O L L A I R E V I I.

Les poids E, F, étant fixement appliquez aux extrémités du Levier droit XO, comme on les voit dans les Fig. 195. 196. 197. & de directions toujours concourantes au centre A de la Terre, si l'on suppose que la pesanteur de chacun d'eux varie en raison de ses différentes distances à ce centre; en sorte que quelque situation $x\omega$ qu'on donne au Levier XO, en faisant passer les poids E, F, en e, f , la pesanteur du poids E en X, soit en ce qu'il en aura en x , comme XA à x A; & que celle du poids F en O, soit à ce qu'il en aura en ω , comme OA à ω A: il suit du précédent Corol. 6. que quelques soient d'ailleurs les pesanteurs d'un de ces poids à celles de l'autre, s'ils sont en équilibre entr'eux en X, O, sur le point B du Levier XO, ils seront encore en équilibre entr'eux en x, ω , sur le même point B passé en b dans toute autre situation $x\omega$ de ce Levier, laquelle donne par tout $bx = BX$, & $b\omega = BO$.

Car en prenant encore ici E, F, pour les pesanteurs totales de ces deux poids en X, O, & e, f , pour ce qu'ils en ont en x, ω , la presente hypothese de E. e :: AX. Ax.

& de F. f :: AO. A ω . donnera $E = \frac{e \times AX}{Ax}$, & $F = \frac{f \times AO}{A\omega}$. Or

A a a

Péquilibre supposé en XO sur le point B, donne (*Corol.*

6. nomb. 1.) $E. F. :: AX \times BO. AO \times BX$ (à cause de $BO = b_o$, & de $BX = bx$) $:: AX \times b_o. AO \times bx$. Donc aussi $\frac{e \times AX}{AX}$

$\frac{f \times AO}{AO} :: AX \times b_o. AO \times bx$. c'est-à-dire (en divisant les deux

antecedens par $\frac{AX}{AX}$, & les deux consequens par $\frac{AO}{AO}$) $e. f. ::$

$AX \times b_o. AO \times bx$. Par consequent (*Corol. 6. nomb. 2.*) les mêmes corps E, F, des pesanteurs (*Hyp.*) variables en raison de leurs distances au centre A de la Terre, lesquels étoient (*Hyp.*) en équilibre en X, O, sur le point B du Levier XO, seront encore en équilibre entr'eux en x , o , sur le même point B passé en b , de ce Levier passé en toute autre situation x_o .

COROLLAIRE VIII.

Si presentement on imagine le centre A, auquel on suppose que les poids E, F, ou e, f , tendent toujours, infiniment éloigné d'eux; leurs directions se trouvant alors (*Lem. 6. Corol. 1.*) toutes paralleles entr'elles, & les distances de ces poids à ce centre toutes égales entr'elles, consequemment la pesanteur de chacun d'eux toujours la même dans l'hypothese qu'on fait ici (comme dans le précédent *Corol. 7.*) en raison des distances des poids au centre de la Terre; il suit du précédent *Corol. 7.* que si deux poids quelconques de directions toujours paralleles entr'elles; & de pesanteurs toujours les mêmes, sont équilibre entr'eux sur un point quelconque d'un Levier auquel ils soient appliquez, ils se trouveront de même toujours en équilibre entr'eux sur ce point de ce Levier dans toute autre situation de ce même Levier, ainsi qu'on l'a déjà vû d'une autre maniere dans le *Corol. 40.* du Th. 21.

COROLLAIRE IX.

Donc (*Corol. 7. 8.*) un Levier droit chargé de deux poids quelconques à ses extrêmités, ayant toujours (*Th. 21. part. 6.*) un point sur lequel ces deux poids demeureront en équilibre entr'eux ; il aura aussi toujours un point (qui sera celui-là) sur lequel cet équilibre se conservera toujours, quelques différentes situations qu'on donne à ce Levier, soit que ces poids de pesanteurs (*Hyp.*) proportionnelles dans chacun d'eux à ses différentes distances du centre de la Terre, auquel on les suppose toujours tendre, aient leurs directions concourantes, ou (*Lem. 6. Corol. 1.*) parallèles entr'elles, selon que ce centre sera finiment ou infiniment éloigné d'eux. Par conséquent ce point ou appui d'équilibre perpendiculaire sur la ligne droite qui enfile ces poids par leurs centres de forces particulières, principes de leurs directions, s'appelant (*Déf. 14.*) *centre de gravité* commun à ces deux poids ; il suit que deux poids quelconques, soit (*Corol. 7.*) de directions concourantes toutes au centre de la Terre avec des pesanteurs proportionnelles pour chacun d'eux aux différentes distances finies de ce centre à lui, soit (*Corol. 8.*) de directions toutes parallèles entr'elles avec des pesanteurs constantes, & toujours les mêmes, doivent toujours avoir entr'eux un centre commun de gravité dans une ligne droite menée par leurs centres de forces particulières, sur lequel ces deux poids fixes aux extrêmités de cette ligne droite inflexible & sans pesanteur demeureroient toujours en équilibre entr'eux, quelque variété de situations qu'on donnât à cette ligne droite ainsi prise pour un Levier.

COROLLAIRE X.

Donc tout poids de l'une ou de l'autre de ces deux hypothèses pouvant être regardé comme ainsi fait de deux autres, ou de deux parties ainsi en équilibre entr'elles sur quelqu'un de ses points, quelque situation qu'on lui

donne; il fuit nécessairement de-là (*Corol. 9.*) qu'il n'y a point de poids qui dans l'une & dans l'autre de ces deux hypothèses, n'ait un centre de gravité toujours le même; c'est-à-dire, un point toujours le même, sur lequel appuyé ou soutenu, il ne demeurât en repos, quelque situation qu'on lui donnât autour de ce point fixe, ainsi qu'on l'a déjà vu dans le *Corol. 42. du Th. 21.* pour les poids de la seconde de ces deux hypothèses, qui est de poids faits de parties toutes de pesanteurs constantes & de directions toutes parallèles entr'elles.

S C H O L I E

FIG. 195.
196.

I. Le *Corol. 7.* qui vient de donner ces centres de gravité par le moyen des *Corol. 8. 9. 10.* qui en résultent, se peut encore démontrer par le moyen du *Corol. 11. du Th. 21.* Pour cela, après avoir mené les droites AB, Ab, dans les Fig. 195. 196. soit encore prise \int pour la caractéristique des sinus, la Trigonométrie donnera $AO \cdot AX :: \int AXO. \int AOX :: \int AXB. \int AOB$. Et $Ax \cdot A\omega :: \int A\omega x. \int Ax\omega :: \int A\omega b. \int Ax b$. Donc (en multipliant par ordre) $AO \times Ax. AX \times A\omega :: \int AXB \times \int A\omega b. \int AOB \times \int Ax b$. Or en prenant E, e, pour les pesanteurs du même corps E en ces points, & F, f, pour les pesanteurs du même corps F en ces autres points, l'on aura (*Hyp.*) $F \cdot f :: AO. A\omega$. Et $e \cdot E :: Ax. AX$. Ce qui (en multipliant par ordre) donne $Fxe. Exf :: AO \times Ax :: AX \times A\omega$. Donc on aura aussi $Fxe. Exf :: \int AXB \times \int A\omega b. \int AOB \times \int Ax b$ (H).

Or la Trigonométrie donne pareillement $BX. AB ::$

$$\frac{\int BAX. \int AXB}{BX} = \frac{AB \times \int BAX}{BX}. \text{ Deplus } BO. AB :: \int BAO.$$

$$\frac{\int AOB}{BO} = \frac{AB \times \int BAO}{BO}. \text{ Deplus encore } b\omega. Ab :: \int bA\omega. \int A\omega b$$

$$= \frac{Ab \times \int bA\omega}{b\omega}. \text{ Et enfin } bx. Ab :: \int bAx. \int Ax b = \frac{Ab \times \int bAx}{bx}.$$

$$\text{Par conséquent } \int AXB. \int AOB :: \frac{AB \times \int BAX}{BX} \cdot \frac{AB \times \int BAO}{BO} ::$$

$$\frac{f_{BAX}}{BX} \cdot \frac{f_{BAO}}{BO}. \text{ Et } f_{Aob} \cdot f_{Axb} :: \frac{Ab \times f_{BA\omega}}{b\omega} \cdot \frac{Ab \times f_{BAx}}{bx} ::$$

$$\frac{f_{BA\omega}}{b\omega} \cdot \frac{f_{BAx}}{bx}. \text{ Par conséquent aussi } f_{AXB} \times f_{Aob} \cdot f_{AOB} \times$$

$$f_{Axb} :: \frac{f_{BAX} \times f_{BA\omega}}{BX \times b\omega} \cdot \frac{f_{BAO} \times f_{BAx}}{BO \times bx} \text{ (la supposition de } BX =$$

$$bx, BO = b\omega, \text{ rendant } BX \times b\omega = BO \times bx) :: f_{BAX} \times f_{BA\omega} \cdot f_{BAO} \times f_{BAx}.$$

Donc suivant la précédente analogie H, l'on aura toujours ici $F \times e :: f_{BAX} \times f_{BA\omega} \cdot f_{BAO} \times f_{BAx}$. Or l'équilibre supposé entre les poids en E, F, sur l'appui B, donne (Th. 21. Corol. 11. nomb. 1.) $F \cdot E :: f_{BAX} \cdot f_{BAO}$. Donc, en divisant par ordre la précédente analogie par celle-ci, l'on aura $e \cdot f :: f_{BA\omega} \cdot f_{BAx}$. Par conséquent il y aura encore ici équilibre sur l'appui b (Th. 21. Cor. 11. nomb. 1.) entre les mêmes corps en $e \cdot f$. Ainsi ces poids de pesanteurs chacun en raison de ses différentes distances au centre A de la Terre, une fois en équilibre entr'eux sur un point quelconque B de leur Levier en situation quelconque XO, conserveront toujours cet équilibre sur le même appui B passé en b dans toute autre situation $x\omega$ qu'on voudra de ce même Levier, ainsi qu'on l'a déjà vu dans le précédent Corol. 7. D'où l'on peut conclure ici comme là, les centres de gravité démontrez dans les Corol. 8. 9. 10. qui résultent de ce Corol. 7.

II. A l'occasion de ces centres de gravité, voici un Théoreme assez curieux, que j'ai vu quelque part, sans pouvoir me souvenir où je l'ai vu: je me souviens seulement que l'Auteur, après avoir supposé trois poids A, B, C, en raison de 1, 2, 3, de pesanteurs constantes, & de directions paralleles entr'elles, placez à volonté; pour en trouver le centre commun de gravité, menoit par leurs centres particuliers deux droites AB, AC, qu'il divisoit en E, D, en raison reciproque des poids qui les terminoient: ensuite il menoit par ces points deux autres droites

Fig. 193

tes BD, CE, qui se coupoient en G; il prétendoit que ce point G étoit le centre commun de gravité de ces trois poids. Mais comme il ne les supposoit qu'en raison de 1, 2, 3, & qu'il paroïssoit (autant que je peux m'en souvenir) vouloir toujours avoir recours à des nombres, pour en faire la démonstration; voici le tout en general pour des poids quelconques, sans y employer de nombres.

Soit donc presentement trois poids quelconques A, B, C, lesquels soient aussi de pesanteurs constantes, & de directions paralleles entr'elles; que ces trois poids soient encore disposez comme l'on voudra. Je dis, comme cet Auteur, que la construction précédente, à laquelle il ajoute EF parallele à BD, donnera toujours le point G d'intersection des droites BD, CE, pour le centre commun de gravité de ces trois poids quelconques A, B, C.

Car la construction donnant C. $A :: DA. DC = \frac{A \times DA}{C}$

Et $A. B :: EB. EA$. laquelle seconde analogie (en composant) donne $A+B. B :: EB+EA. EA :: AB. EA :: BD. EF$

$:: DA. FA$. D'où résulte $EF = \frac{B \times BD}{A+B}$, & $FA = \frac{B \times DA}{A+B}$,

& consequemment $DF (DA - FA) = DA - \frac{B \times DA}{A+B} =$

$\frac{A \times DA}{A+B}$. L'on aura ici $FC (DF + DC) = \frac{A \times DA}{A+B} + \frac{A \times DA}{C}$

$= \frac{A+B+C \times A \times DA}{A+B \times C}$; & consequemment (à cause de

$DC = \frac{A \times DA}{C}$) $FC. DC :: \frac{A+B+C \times A \times DA}{A+B \times C} \cdot \frac{A \times DA}{C} ::$

$\frac{A+B+C}{A+B} \cdot 1 :: A+B+C. A+B$. Or les paralleles (*Hyp.*)

EF, DC, rendent $FC. DC :: FE. DG$ (à cause de $FE =$

$\frac{B \times BD}{A+B}$) $:: \frac{B \times BD}{A+B} DG :: B \times BD. A+B \times DG$. Donc



$A \div B \div C$. $A \div B :: B \times BD$. $A \div B \times DG$. Ce qui (en divisant les conséquens par $A \div B$) rend $A \div B \div C$. $1 :: B \times BD$. DG . D'où résulte $A \div B \div C$. $B :: BD$. DG . Et (en retranchant les conséquens) $A \div C$. $B :: BG$. DG .

Or suivant les hypothèses qu'on fait ici de DA . $DC :: C$. A . & des pesanteurs constantes avec des directions parallèles de ces deux poids A , C , le point D de leur Levier AC étant (par les précédens Corol. 5. 8. & aussi par le Corol. 41. du Th. 21.) leur centre commun de gravité, & (Th. 21. Corol. 41.) chargé de la somme $A \div C$ de ces deux poids suivant une direction parallèle aux leurs, qu'on suppose aussi l'être à celle du poids B ; le Levier BD se trouve ici chargé en B , D , de deux poids B , $A \div C$, de pesanteurs constantes, & de directions parallèles entr'elles. Donc l'analogie $A \div C$. $B :: BG$. DG . qu'on vient de trouver, donne ici (suivant les précédens Corol. 5. 8. & suivant le Corol. 41. du Th. 21.) le point G de ce Levier BD pour le centre commun de gravité de ces trois poids A , B , C . Ce qu'il falloit démontrer.

Voilà pour le centre commun de gravité de trois poids de pesanteurs constantes, & de directions parallèles entr'elles, donnez de position arbitraire. Voici présentement pour trouver celui de trois poids de directions concourantes au centre de la Terre avec des pesanteurs pour chacun d'eux en raison des différentes distances de ce centre à chacun de leurs centres particuliers de gravité, démontrez dans le Corol. 10. du précédent Th. 23. De ceci résultera encore une autre démonstration du précédent art. 2. dans le Corollaire du Théoreme suivant.

THEOREME XXIV.

Soient trois poids quelconques A , B , C , entr'eux de position constante quelconque, & de pesanteurs qui pour chacun d'eux soient en raison des distances de son centre de gravité (démontré dans le Corol. 10. du Th. 23.) à celui T de la Terre, auquel ces poids & leurs parties tendent toutes. Après avoir mené les droites AB , AG , par les centres de gravité A ,

FIG. 1.

B, C , de ces trois poids, soient imaginées trois proportionnelles Ta, Tb, Tc , à ces trois poids A, B, C , prises depuis T sur leurs directions AT, BT, CT ; des deux extrêmes Ta, Tc , de ces trois proportionnelles soit fait le parallélogramme $SaTc$, dont la diagonale ST rencontre la droite CA en D ; de même des deux premières Ta, Tb , de ces trois proportionnelles soit aussi fait le parallélogramme $VaTb$, dont la diagonale VT rencontre pareillement la droite AB en E .

Je dis que le point G de rencontre des deux droites BD, CE , sera le centre commun de gravité des trois poids proposés A, B, C , dans la position donnée entr'eux.

DEMONSTRATION.

I. La part. 6. du Th. 21. fait voir que les deux poids A, C , appliquez (comme on les voit) aux extrémités du Levier droit AC , feroient équilibre entr'eux sur le point D de ce Levier; & conséquemment (Th. 23. Corol. 9.) que ce point D feroit leur centre commun de gravité, duquel la charge feroit (Th. 21. part. 2. 3. 4.) de D vers T suivant la diagonale ST du parallélogramme $SaTc$, & à chacun de ces deux poids A, C , comme cette diagonale TS à chacune de leurs proportionnelles Ta, Tc .

On verra de même (Th. 21. part. 6.) que les deux poids A, B , appliquez (comme on les voit) aux extrémités du Levier droit AB , feroient équilibre entr'eux sur le point E de ce Levier; & conséquemment (Th. 23. Corol. 9.) que ce point E feroit leur centre commun de gravité, duquel la charge feroit (Th. 21. part. 2. 3. 4.) de E vers T suivant la diagonale VT du parallélogramme $VaTb$, & à chacun de ces deux poids A, B , comme cette diagonale VT à chacune de leurs proportionnelles Ta, Tb .

II. Concevons présentement deux autres parallélogrammes, dont le premier soit $STbR$, fait des proportionnelles (art. 1.) Tb, TS , au poids B : & à la force résultante du concours des deux autres A, C ; & dont le second soit $VTcZ$ fait des proportionnelles (art. 1.) Tc, TV , au poids C , & à la force résultante du concours des deux autres

tres poids A, B. Le Corol. 10. du Lem. 3. fera voir dans le premier STbR de ces deux parallelogrammes, que l'impression ou la force résultante du concours de ces trois poids A, B, C, sera de R vers T suivant la diagonale RT de ce parallelogramme, laquelle sera à chacune des proportionnelles de ces trois poids, comme cette force à chacun d'eux; & dans le second VTcZ, que cette impression ou force résultante du concours des trois mêmes poids A, B, C, de position (*Hyp.*) constante entre eux, sera aussi de Z vers T suivant la diagonale ZT de cet autre parallelogramme, laquelle sera de même à chacune des proportionnelles de ces deux poids comme cette force à chacun d'eux: d'où l'on voit que ces deux diagonales RT, ZT, doivent ici se confondre en une, qui sera la direction vers T de toute la force résultante du concours des trois poids A, B, C; & les points R, Z, se confondre aussi en un seul.

III. Donc (*princ. gener.*) le plan mobile BAC, dans lequel les centres de gravité de ces trois poids A, B, C, sont supposez fixement placez, demeurera immobile, & eux en équilibre entr'eux sur le point G, où ce plan est traversé par cette direction RT de l'impression ou force résultante (*art. 2.*) du concours de ces trois poids. Or des deux droites BD, CE, qui sont dans le plan BAC des centres de gravité A, B, C, de ces trois poids, la premiere BD étant (*constr.*) dans le plan STb du parallelogramme STbR avec sa diagonale RT, & la seconde CE étant aussi (*constr.*) dans le plan VTc du parallelogramme VTcZ avec sa diagonale ZT, ou (*art. 2.*) RT; ces droites BD, CE, doivent rencontrer toutes deux cette direction RT au point G, où elle traverse le plan BAC des centres de gravité des poids. Donc ce plan avec ces trois poids, doit aussi demeurer en équilibre sur un appui placé au point G, où ces deux droites BD, CE, se rencontrent.

IV. Or quelque nouvelle situation qu'on donne à ce plan mobile, ou à ces trois poids A, B, C, de position

(*Hyp.*) constante entr'eux, le point d'équilibre D (*art. 1.*) des deux poids A, C, sur leur Levier AC, & celui E (*art. 1.*) des deux A, B, sur leur Levier AB, seront (*Th. 23. Corol. 7.*) toujours les mêmes. Donc le point G de rencontre des deux droites BD, CE, & d'équilibre (*art. 3.*) en re ces trois poids A, B, C, sera aussi toujours le même; & conséquemment (*Déf. 14.*) ce point d'intersection G des droites BD, CE, sera le centre commun de gravité de ces trois poids A, B, C. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Si l'on prend presentement A, B, C, pour les masses des poids appelez jusqu'ici de ces noms, & encore leurs distances AT, BT, CT, au centre T de la Terre, pour les pesanteurs de chacun de leurs points ou parties égales; ces poids appelez jusqu'ici A, B, C, pour abreger, seront ici $A \times AT$, $B \times BT$, $C \times CT$.

FIG. 200.

Cela étant, si l'on suppose presentement le centre T de la Terre infiniment éloigné de ces poids de distances finies entr'eux, en sorte que (*Déf. 11.*) tous les angles en T soient infiniment aigus, & leurs complemens (à deux droites) en a, b, c , infiniment obtus; ce cas rendant (*Lem. 6. Corol. 1.*) les droites AT, BT, CT, VT, RT, ST, toutes paralleles entr'elles, & les terminées en a, b, c , confondues (*Lem. 6. Corol. 3.*) avec aA, bB, cC ; le tout comme dans la Fig. 200. Alors les distances AT, BT, CT, qui expriment (*Hyp.*) les pesanteurs des parties des poids $A \times AT$, $B \times BT$, $C \times CT$, au centre T de la Terre, se trouvant toutes égales entr'elles; ces poids seront alors de directions toutes paralleles entr'elles, & de pesanteur constante, qui les rendra pour lors en raison de leurs masses A, B, C: ainsi les points E, D, d'équilibre (*art. 1.*) de ces poids deux à deux sur leurs Leviers droits AB, AC, divisant alors (*Th. 21. Corol. 13.*) chacun de ces Leviers en raison reciproque des deux poids appliquez à ses extrêmités; le present Th. 24. fait conséquemment voir qu'en divisant ainsi ces deux Leviers AB, AC, par

deux droites CE, BD, le point G d'intersection de ces deux droites sera encore ici le centre commun de gravité des trois poids quelconques A, B, C, de pesanteurs constantes, & de directions paralleles entr'elles, ainsi qu'on l'a déjà vû d'une autre maniere dans l'art. 2. du Schol. du Th. 23.

D E F I N I T I O N XXIV.

De plusieurs forces ou puissances appliquées à un Levier, j'appelle *contraires* celles qui tendent à lui donner des mouvemens contraires autour de son point fixe ; & *conspirantes* entr'elles, celles qui tendent à le mouvoir en même sens autour de cet appui, soit que les points d'application des conspirantes de chaque part, soient tous, ou non, du même côté de cet appui. Suivant ces noms, les puissances M, N, qui dans les Fig. 201. 202. 203. tendent chacune à faire tourner de bas en haut le bras BG du Levier AG autour de son appui fixe B, seront appelées *conspirantes* entr'elles ; de même les puissances O, P, Q, qui tendent chacune à faire tourner de haut en bas ce bras BG de ce Levier autour de ce même appui B, seront aussi appelées *conspirantes* entr'elles : mais ces deux mouvemens étant contraires entr'eux, ces trois puissances O, P, Q, seront appelées *contraires* aux deux autres M, N, & ces deux-ci à ces trois-là. Les *Momens* (Momenta) de ces puissances seront aussi appelez *conspirans* ou *contraires*, selon que ces puissances le seront. Enfin la somme des *Momens* conspirans d'une part, sera aussi appelée *contraire* à celle des conspirans en sens contraire de l'autre part.

Il est cependant à remarquer qu'on n'appelle ici *contraires* les forces ou leurs momens, qu'à raison des mouvemens contraires, que ces forces séparément prises causeroient au Levier autour de son appui ; puisque concourant toutes ensemble, elles conspirent & se réduisent toutes (*princ. gener.*) à une seule contre ce Levier, lequel demeurera en repos, ou non, & en consequence

toutes ces puissances en équilibre, ou non, selon que la direction de cette force résultante de leur concours passera, ou non, par l'appui de ce Levier.

THEOREME XXV.

FIG. 201.
202. 203.

Tant de puissances qu'on voudra M, N, O, P, Q , &c. étant appliquées en autant de points A, C, E, H, G , &c. d'un Levier quelconque AG suivant des directions quelconques en un même plan; du concours V de celles HP, GQ , de deux quelconques P, Q , de ces puissances, soient prises sur ces deux directions HP, GQ , des parties VR, VS , proportionnelles à ces deux puissances P, Q : après en avoir fait le parallélogramme $VRKS$, dont la diagonale KV prolongée rencontre le Levier en λ , & en T la direction OE prolongée la puissance O ; sur ces deux lignes $T\lambda, TO$, soient pris $TY=VK$, & $TZ.VR::O.P$. De même après avoir fait le parallélogramme $TYXZ$, dont la diagonale TX prolongée de part & d'autre rencontre le Levier en F , & en β la direction NC prolongée de la puissance N ; sur ces deux lignes $\beta F, \beta C$, soient prises $\beta\gamma=TX$, & $\beta\epsilon.VR::N.P$. De même encore, après avoir fait le parallélogramme $\beta\epsilon\delta\gamma$, dont la diagonale $\beta\delta$ prolongée rencontre en D le Levier prolongé, & en L la direction prolongée AM de la puissance M ; sur ces deux lignes $\beta L, AL$, prolongées soient prises $L\theta=\beta\delta$, & $L\omega.VR::M.P$. Et toujours de même jusqu'à la dernière de tout ce qu'il pourroit y avoir ici d'autres puissances, desquelles on dira ce qu'on va voir des cinq qu'on y voit, desquelles la dernière étant M , je dis,

I. Que si des côtes $L\theta, L\omega$, qu'on vient de déterminer, on fait le parallélogramme $L\theta I\omega$, dont la diagonale IL prolongée vers le Levier, le rencontre en B : un appui fixe en ce point B du Levier, soutiendra en équilibre entr'elles toutes les cinq puissances M, N, O, P, Q , qu'on suppose ici appliquées à ce Levier.

II. Reciproquement s'il y a ici équilibre sur l'appui B entre les cinq puissances qu'on y suppose données, & de directions don-

nées : la diagonale prolongée LI du dernier LθIω des quatre parallelogrammes qu'on voit ici, passera par cet appui B.

III. La charge de cet appui B résultante du concours d'action de toutes les puissances, sera dirigée de B vers I suivant la diagonale LI du parallelogramme LθIω.

IV. Cette charge sera à chacune de ces puissances M, N, O, P, Q, comme cette diagonale LI à chacun des côtez Lω, βε, TZ, VR, VS, que les parallelogrammes LθIω, βεδγ, TZXY, VRKS, ont sur les directions de ces puissances.

V. En ce cas d'équilibre sur l'appui B du Levier AG, si de ce point B on mène sur ces directions prolongées AM, NC, EO, PH, GQ, autant de perpendiculaires Ba, Bc, Be, Bh, Bg, qui les rencontrent en a, c, e, h, g, l'on aura toujours $M \times Ba + N \times Bc = O \times Be + P \times Bh + Q \times Bg$.

VI. Reciproquement si l'on a ici $M \times Ba + N \times Bc = O \times Be + P \times Bh + Q \times Bg$, il y aura équilibre sur l'appui B des cinq puissances M, N, O, P, Q, qu'on y suppose données & de directions données AM, NC, EO, PH, GQ, auxquelles on suppose aussi que Ba, Bc, Be, Bh, Bg, sont perpendiculaires.

DEMONSTRATION.

PART. I. Ayant (constr.) la puissance P à chacune des quatre autres Q, O, N, M, comme le côté VR que le parallelogramme VRKS a sur la direction PG prolongée de cette puissance P, est à chacun des côtez VS, TZ, βε, Lω, que ce parallelogramme & les trois autres qu'on voit ici, ont sur les directions de ces quatre autres puissances Q, O, N, M ; ces cinq lignes VR, VS, TZ, βε, Lω, sont proportionnelles à ces cinq puissances P, Q, O, N, M.

Si presentement on appelle λ l'effort résultant du concours des puissances P, Q ; F, le résultant du concours de λ & de la puissance O ; D, le résultant du concours F & de la puissance N ; & B, le résultant de D & de la puissance M : les proportionnelles précédentes jointes aux suppositions faites d'abord de $TY = VK$, $βγ = TY$, $Lθ = βδ$; donneront (Lem. 3. Corol. 1. nomb. 1. 2.) l'effort λ

(résultant du concours des puissances P, Q) de V vers K suivant VK , & $\lambda. P :: VK. VR$ (*constr.*) $:: TY. VR$. De sorte qu'ayant (*constr.*) $P. O :: VR. TZ$. l'on aura aussi (en raison ordonnée) $\lambda. O :: TY. TZ$. Par conséquent l'effort F résultant du concours de l'effort λ & de la puissance O , c'est-à-dire, du concours des trois puissances P, Q, O , sera de même de T vers X suivant TX , & à la puissance $O :: TX. TZ$. De sorte qu'ayant (*constr.*) $O. P :: TZ. VR$. & $P. N :: VR. \beta$. l'on aura aussi $F. N :: TX. \beta$ (*constr.*) $:: \beta\gamma. \beta$. Donc par la même raison l'effort D résultant du concours de l'effort F & de la puissance N , c'est-à-dire, du concours des quatre puissances P, Q, O, N , sera de β vers δ suivant $\beta\delta$, & à la puissance $N :: \beta\delta. \beta$. De sorte qu'ayant (*constr.*) $N. P :: \beta. VR$. & $P. M :: VR. L$. l'on aura aussi $D. M :: \beta\delta. L$ (*constr.*) $:: L\theta. L$. Donc par la même raison encore l'effort B résultant du concours de l'effort D & de la puissance M , c'est-à-dire, du concours des cinq puissances P, Q, O, N, M , sera de L vers I suivant la diagonale LI du parallélogramme $L\theta I\omega$. Donc enfin (*princ. gen. Corol. 1.*) ces cinq puissances seront en équilibre entr'elles sur un appui fixe placé au point B , où cette diagonale LI prolongée rencontre le Levier. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. Pour l'équilibre sur l'appui B entre toutes les puissances qu'on suppose appliquées au Levier AG , il faut (*princ. gen. Corol. 2.*) que cet appui B se trouve dans la direction de l'effort résultant du concours d'action de toutes ces puissances. Or suivant la démonstration de la part. 1. la direction de cet effort commun est ici de L vers I suivant la diagonale LI du parallélogramme $L\theta I\omega$. Donc en cas d'équilibre entre toutes ces puissances M, N, O, P, Q , sur l'appui fixe B du Levier auquel on les suppose appliquées; cette diagonale LI prolongée passera par cet appui B . *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. Suivant la démonstration de la partie 1. tout ce que les puissances M, N, O, P, Q , font ensemble d'effort sur le Levier AG , se réduisant à leur

effort commun de L vers I suivant LI; & l'appui fixe B placé dans cette direction ou ligne prolongée, soutenant (Ax. 3.) cet effort tout entier qui (Déf. 21.) en fait toute la charge: c'est une conséquence nécessaire que la direction de la charge de cet appui fixe B soit ici de L vers I suivant LI diagonale du parallélogramme L θ I ω . Ce qu'il falloit 3°. démontrer.

PART. IV. Suivant la démonstration de la partie 1. l'effort D non seulement résulte de β vers δ suivant $\beta\delta$, du concours des quatre puissances N, O, P, Q, mais encore est à la puissance M :: L θ . L ω . Donc (Lem. 3. Cor. 1. nomb. 2.) l'effort B, qui suivant la démonstration de la partie 3. est la charge de l'appui de ce nom, résultante du concours de cet effort D & de cette puissance M, c'est-à-dire, du concours des cinq puissances M, N, O, P, Q, est à cette puissance M, comme la diagonale LI du parallélogramme L θ I ω est à son côté correspondant L ω , ou (ce qui revient au même) B. M :: LI. L ω . Mais (constr.) M. P :: L ω . VR. Donc aussi (en raison ordonnée) la charge B. P :: LI. VR. Or (constr.) la puissance P est à chacune des quatre autres Q, O, N, M, comme le côté VR du parallélogramme VRKS est à chacun des côtes correspondans VS, TZ, $\beta\epsilon$, L ω , de ce parallélogramme & des trois autres TZXY, $\beta\epsilon\delta\gamma$, L ω I θ . Donc (en raison ordonnée) la charge B de l'appui de ce nom, résultante du concours des cinq puissances proposées M, N, O, P, Q, est à chacune de ces puissances, comme la diagonale LI du dernier L ω I θ de ces parallélogrammes, est à chacun des côtes L ω , $\beta\epsilon$, TZ, VR, VS, que tous ces parallélogrammes ont sur les directions de ces puissances. Ce qu'il falloit 4°. démontrer.

PART. V. Il faut ici se souvenir que dans la construction faite dans l'énoncé du présent Th. 25. on a pris L θ = $\beta\delta$, $\beta\gamma$ =TX, TY=VK: cela joint au Corol. 1. du Lem. 16. donnera L ω ×Ba (Lem. 16. Corol. 1. nomb. 4.) =L θ ×Bd= $\beta\delta$ ×Bd (Lem. 16. Corol. 1. nomb. 2.) = $\beta\gamma$ ×Bf= $\beta\epsilon$ ×Bc=— $\beta\epsilon$ ×Bc—+TX×Bf (Lem. 16. Cor. 1. nomb. 1.)

$$\begin{aligned}
 &= -\beta e \times Bc + TZ \times Be + TY \times Bl = -\beta e \times Bc + TZ \times Be + \\
 &VK \times Bl \text{ (Lem. 16. Corol. 1. nomb. 1.) } = -\beta e \times Bc + TZ \times \\
 &Be + VS \times Bg + VR \times Bh. \text{ Donc } L\omega \times Ba + \beta e \times Bc = TZ \times Be \\
 &+ VS \times Bg + VR \times Bh.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \begin{array}{l} P. M :: VR. L\omega = \frac{M \times VR.}{P} \\ P. N :: VR. \beta e = \frac{N \times VR.}{P} \\ \text{Or (constr.) } \left\{ \begin{array}{l} P. O :: VR. TZ = \frac{O \times VR.}{P} \\ P. Q :: VR. VS = \frac{Q \times VR.}{P} \end{array} \right. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Donc en substituant toutes ces valeurs de $L\omega$, βe , TZ , VS , dans la dernière équation qui précède ces analo-

gies, elle se changera en $\frac{M \times VR \times Ba + N \times VR \times Bc}{P} = \frac{O \times VR \times Be + Q \times VR \times Bg}{P} + VR \times Bh$. Donc aussi en mul-

tipliant le tout par $\frac{P}{VR}$, l'on aura enfin dans le cas d'équilibre ici supposé, $M \times Ba + N \times Bc = O \times Be + Q \times Bg + P \times Bh$. Ce qu'il falloit 5°. démontrer.

PART. VI. Je dis réciproquement que si $M \times Ba + N \times Bc = O \times Be + Q \times Bg + P \times Bh$, il y aura équilibre sur le point fixe B du Levier AG entre les puissances M, N, O, P, Q, qu'on lui suppose appliquées. Car si elles ne demeuroident pas ainsi en équilibre toutes ensemble sur cet appui fixe B, il y en auroit quelqu'une d'elles, par exemple, M, qui seroit trop grande ou trop petite pour cela. En ce cas (tout le reste demeurant le même) soit quelqu'autre puissance μ substituée à la place de M, & qui tirant le cordon AM de celle-ci vers le même côté, & suivant la même direction qu'elle, demeure en équilibre

bre sur ce même appui B avec les quatre autres puissances N, O, P, Q, auxquelles on n'a rien changé. En ce cas d'équilibre sur cet appui B entre ces cinq puissances μ , N, O, P, Q, dirigées (*Hyp.*) comme les cinq M, N, O, P, Q, & en même sens qu'elles: la part. 5. donneroit $\mu \times Ba + N \times Bc = O \times Be + Q \times Bg + P \times Bh$. Mais en cas d'équilibre sur ce même appui B entre les cinq dernières ainsi dirigées, la même part. 5. vient de donner aussi $M \times Ba + N \times Bc = O \times Be + Q \times Bg + P \times Bh$. Donc on auroit alors $\mu \times Ba = M \times Ba$, c'est-à-dire, $\mu = M$. Par conséquent puisque (*Hyp.*) la puissance μ feroit ici équilibre sur l'appui B avec les quatre N, O, P, Q; la puissance M rendue à son cordon AM au lieu de cette puissance μ , & dirigée (*Hyp.*) comme elle, & en même sens, demeurera de même en équilibre avec ces quatre autres puissances N, O, P, Q, sur le même appui B. Donc si $M \times Ba + N \times Bc = O \times Be + Q \times Bg + P \times Bh$, il y aura équilibre sur cet appui fixe B du Levier AG entre les cinq puissances M, N, O, P, Q, qu'on lui suppose appliquées. *Ce qu'il falloit 6°. démontrer.*

C O R O L L A I R E I.

Les produits qui composent les égalitez des part. 5. 6. exprimant (*Déf. 22.*) les forces relatives ou *Momens*. (*Momenta*) des puissances qui s'y trouvent multipliées chacune par la distance de sa direction à l'appui B du Levier AG, auquel elles sont appliquées, & ce qu'on y vient de voir des cinq précédentes puissances M, N, O, P, Q, convenant de même à ce qu'on voudroit en supposer d'autres quelconques appliquées à ce Levier quelconque, & de directions à volonté;

1°. La part. 5. fait voir qu'en cas d'équilibre entre toutes ces puissances sur l'appui du Levier auquel on les suppose appliquées, les sommes contraires de *Momens* en seront toujours égales entr'elles, c'est-à-dire (*Déf. 24.*) que la somme de leurs momens conspirans à faire tourner le Levier en un sens sur son appui, fera toujours

alors égale à la somme des conspirans à le faire tourner en sens contraire sur cet appui, ainsi qu'on l'a déjà vu dans le Corol. 9. du Th. 21.

2°. La part. 6. fait reciproquement voir que lorsque ces deux sommes de *Momens* seront égales entr'elles, il y aura toujours équilibre entre toutes ces puissances sur l'appui fixe du Levier auquel on les suppose appliquées, ainsi qu'on l'a aussi déjà vu dans le Corol. 9. du Th. 21.

COROLLAIRE II.

Cela étant, on voit qu'en cas d'équilibre entre plusieurs puissances sur l'appui fixe d'un Levier quelconque, on peut en changer à son gré les directions & les points d'application à ce Levier, même d'un côté à l'autre de l'appui, sans que ces puissances cessent de faire équilibre entr'elles sur ce Levier mobile autour de cet appui, pourvu (Corol. 1. nomb. 2.) qu'on les y applique suivant des directions & vers des côtez qui rendent toujours leurs sommes contraires de *Momens* égales entr'elles. D'où il suit que toutes ces puissances quelconques, en quelque nombre qu'elles soient, peuvent demeurer en équilibre entr'elles sur le même appui de ce Levier quelconque suivant une infinité de directions en une infinité de points d'application à ce Levier.

FIG. 201.
202.

C'est pour cela que nonobstant le passage du point C d'application de la puissance N d'un côté à l'autre de l'appui B dans les Figures 201. 202. en la faisant tirer dans une de ces Figures vers un côté opposé à celui vers lequel elle tiroit dans l'autre, & suivant une direction, dont la distance à l'appui B soit égale à celle de cet appui à l'autre direction qu'elle avoit de l'autre côté de lui; cette puissance N, qui aura encore ici (Déf. 21.) le même *Moment* qu'auparavant, & de même des autres puissances M, O, P, Q, auxquelles (Hyp.) on n'a rien changé, fera encore (Corol. 1. nomb. 2.) équilibre avec elles sur le même point d'appui B qu'auparavant : puisque de

Fig. 197.

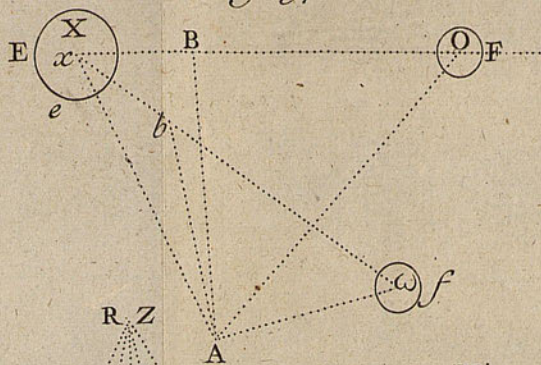


Fig. 198.

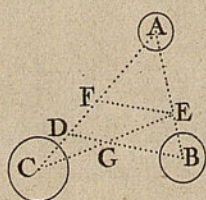


Fig. 200.

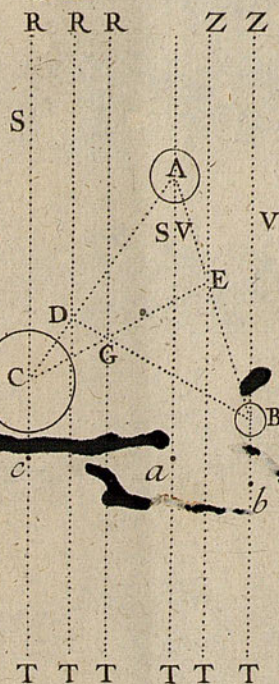


Fig. 199.

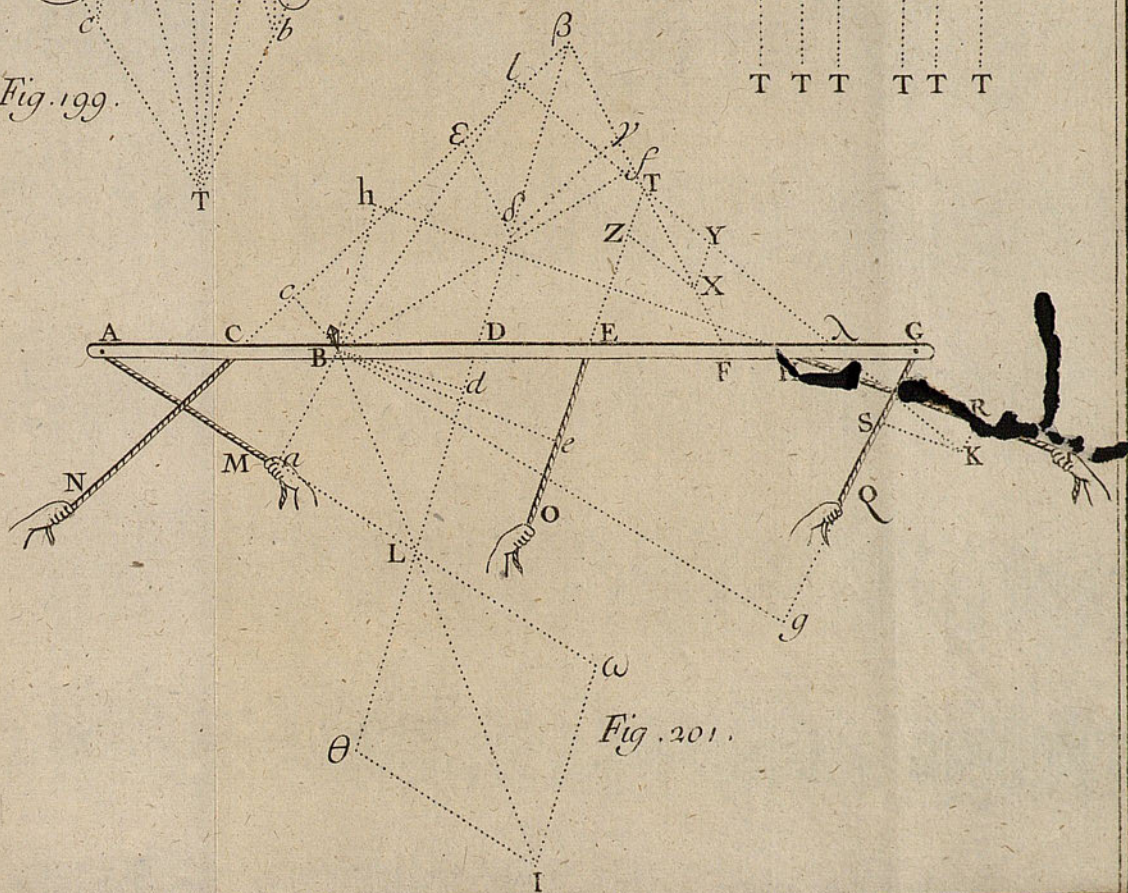


Fig. 201.



Figure. 202.

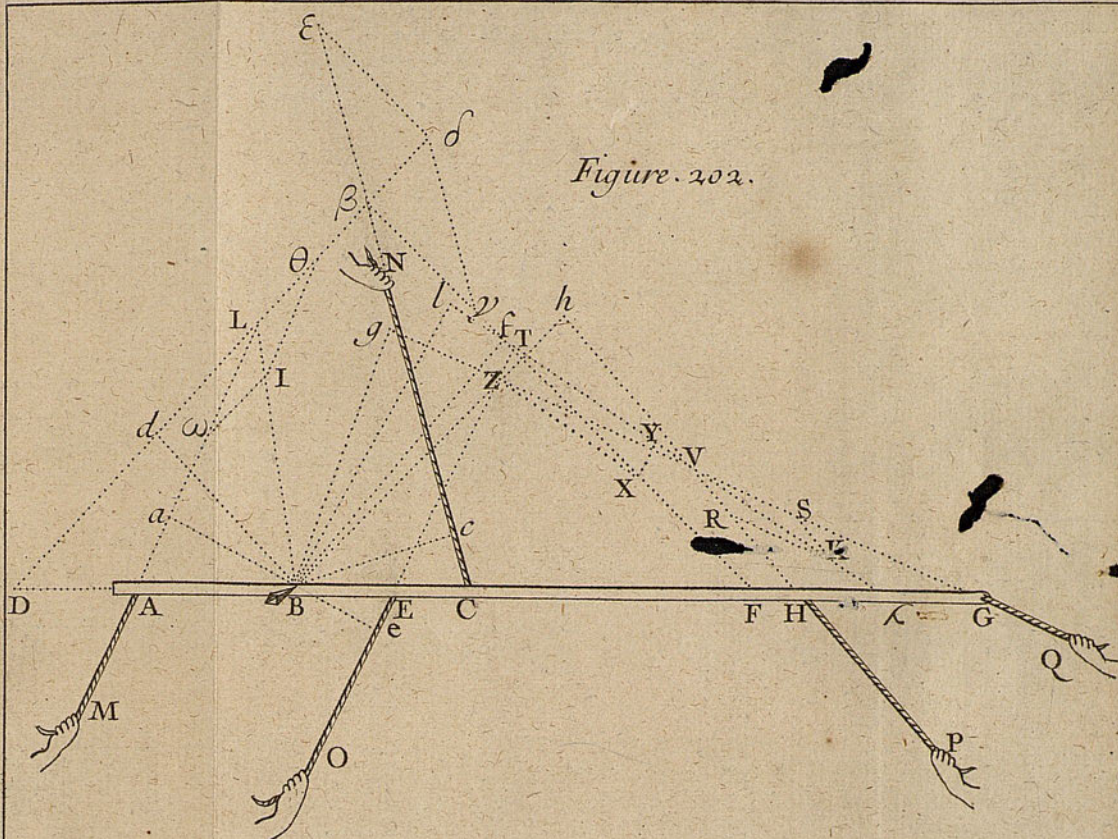
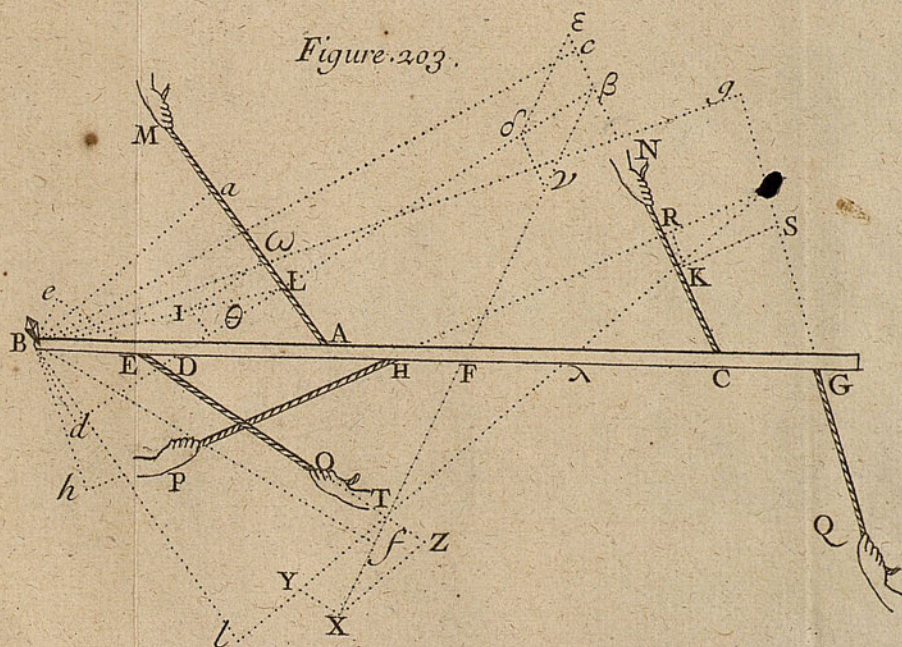


Figure. 203.





cette manière les sommes contraires de *Momens* sont encore ici égales entr'elles.

C'est aussi pour cela que les puissances *M*, *N*, appliquées du même côté que toutes les autres *O*, *P*, *Q*, par rapport à l'appui *B* dans la Fig. 203. y font équilibre avec ces trois autres puissances, comme dans la Fig. 201. où ces deux là sont de l'autre côté de cet appui tendant vers un côté opposé à celui vers lequel elles tendent dans la Fig. 203. & suivant des directions qui leur donnent encore ici une somme de *Momens* égale à celle qu'elles ont là, rien n'ayant (*Hyp.*) changé dans les autres.

FIG. 201.
203.

Fin du premier Tome.





A 077(240)/124

UNIVERSIDAD DE SEVILLA



600157617

i 24647603



77

NOUVEL
MECANIQ

TOM. I

124